Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C.
   (b) Opção D.
   (c) Opção E.
   (d) Opção D.

2. Se escrevermos os números de 1 a 100 na seguinte tabela,

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	

observamos que o algarismo 2 aparece 20 vezes: 10 vezes como algarismo das unidades e 10 vezes como algarismo das dezenas. De igual modo se vê que os algarismos $4, 6$ e 8 também aparecem 20 vezes cada um na tabela acima. Portanto, a soma de todos os algarismos pares presentes nos números de 1 a 100 é $20 \times (2 + 4 + 6 + 8) = 20 \times 20 = 400$.

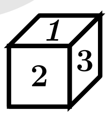
3. A área do retângulo $[ABCD]$ mede $4 \times 3 = 12$ cm^2 e a área do triângulo $[DAB]$ mede metade da área do retângulo, isto é, 6 cm^2.

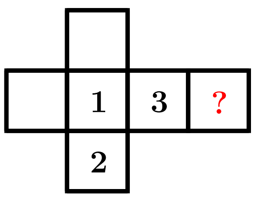
   Os triângulos $[DAB]$ e $[ABM]$ têm a mesma altura relativamente às bases $[DB]$ e $[MB]$, respetivamente. Como $\overline{DB} = 4\,\overline{MB}$, conclui-se que a área de $[DAB]$ é o quádruplo da área de $[ABM]$. Portanto, a área de $[ABM]$ mede $\frac{6}{4} = 1,5$ cm^2.

4. Em primeiro lugar observe-se que, após pintar corretamente as faces do dado, a cor de cada vértice fica determinada pelas cores das faces a que pertence. Assim, basta determinar o número de formas diferentes de pintar as faces do dado com quatro cores.

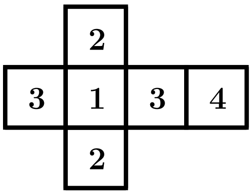
   Solução 1:

   Consideremos três faces do dado com um vértice em comum. Essas três faces têm de ser pintadas com três cores diferentes que representamos pelos algarismos $1, 2$ e 3 (a quarta cor será representada pelo algarismo 4). Temos assim o dado e uma sua planificação

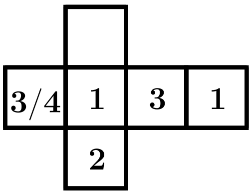




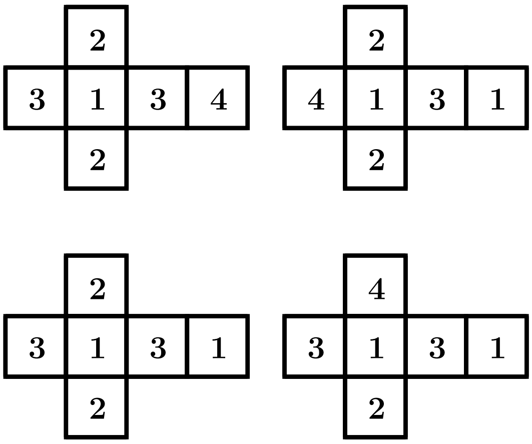
   Na face com $?$ podemos usar a cor 1 ou a cor 4. Escolhendo a cor 4, então só há uma forma de completar a pintura das faces do dado:



Escolhendo a cor 1, temos a seguinte planificação, onde a face mais à esquerda pode ser pintada com a cor 3 ou 4:



Se optarmos pela cor 4, a última face só pode ser pintada com a cor 2. Se optarmos pela cor 3, a última face pode ser pintada com a cor 2 ou a cor 4. Há portanto quatro formas diferentes de completar a pintura do dado com as cores $1, 2, 3$ e 4 que apresentamos nas seguintes planificações:



Por fim temos de estabelecer a correspondência entre as quatro cores e os algarismos $1, 2, 3$ e 4. Para a escolha da cor correspondente ao algarismo 1 temos quatro hipóteses, para o algarismo 2 temos três hipóteses, para o 3 sobram duas hipóteses de escolha e por fim a cor correspondente ao 4 fica determinada. Há assim $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas de distribuir as quatro cores do João pelos algarismos $1, 2, 3$ e 4. Portanto, há $4 \times 24 = 96$ formas de pintar as faces do dado com quatro cores.

Solução 2:

Para pintar a face com uma pinta, temos quatro cores à escolha. Na face oposta (a que tem seis pintas), podemos usar a mesma cor ou uma cor diferente.

Se usarmos uma cor diferente, temos apenas três cores à escolha, ficando com duas cores por usar. Neste caso, temos duas possibilidades para a escolha da cor da face com duas pintas. A partir dessa escolha só conseguimos completar a pintura do dado de uma única forma. Portanto, no caso em que a face com uma pinta e a face oposta têm cores diferentes, existem $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades diferentes de pintar o cubo.

Se usarmos a mesma cor para pintar as faces com uma e seis pintas, então temos quatro hipóteses de escolha dessa cor, restando três cores possíveis para pintar a face com duas pintas. Neste caso temos duas hipóteses:

Se a face com duas pintas e a face oposta (que é a que tem cinco pintas) tiverem a mesma cor, então temos 2×2 formas de pintar as duas faces restantes. Logo, existem $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ formas diferentes de pintar o cubo;

Se a face com duas pintas e a oposta tiverem cores diferentes, temos 3×2 formas de escolher estas duas cores e a cor das faces restantes fica determinada, ou seja, temos $4 \times 3 \times 2 = 24$ formas de pintar o cubo.

Portanto, no total, o João pode pintar o cubo de $24 + 48 + 24 = 96$ formas diferentes.