OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

XXXIII OPM - 2ª Eliminatória - 14.01.2015 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D.
   (b) Opção D.
   (c) Opção A.
   (d) Opção D.

2. Um número de quatro algarismos $abcd$ é múltiplo de 4 se e só se cd é um um múltiplo de 4. Como todas as permutações de um número quatríssimo são múltiplas de 4, então $abcd$ é quatríssimo se e só se ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc são todos múltiplos de 4.

   Como um número que termina num algarismo ímpar não é múltiplo de 4, então um número quatríssimo não pode ter nenhum algarismo ímpar; como $22, 42, 62$ e 82 não são múltiplos de 4, um número quatríssimo também não pode ter nenhum algarismo 2; como 46, 66 e 86 não são múltiplos de 4, um número quatríssimo também não pode ter nenhum algarismo 6.

   Resta notar que todos os números formados apenas por 4 e 8 funcionam, já que 44, 48, 84 e 88 são todos múltiplos de 4. Como para cada algarismo de um número quatríssimo existem duas escolhas (4 ou 8), há ao todo $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ números quatríssimos.

3. Denote-se por α a amplitude do ângulo $\angle CDE$. Como $[CED]$ é um triângulo isósceles de base $[ED]$, tem-se $C\widehat{E}D = C\widehat{D}E = \alpha$. Portanto $B\widehat{C}E = C\widehat{E}D + C\widehat{D}E = 2\alpha$. Sendo $[BCE]$ um triângulo isósceles de base $[CE]$, conclui-se que $B\widehat{E}C = B\widehat{C}E = 2\alpha$. Portanto $A\widehat{B}E = B\widehat{C}E + B\widehat{E}C = 4\alpha$. Por outro lado, como os triângulos $[ABF]$ e $[BEF]$ são congruentes e isósceles de bases respetivamente $[AB]$ e $[BE]$, tem-se $A\widehat{B}F = F\widehat{B}E$ e portanto $B\widehat{E}F = F\widehat{B}E = \frac{A\widehat{B}E}{2} = 2\alpha$. Como $C\widehat{E}D + B\widehat{E}C + B\widehat{E}F = 180°$, então $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, donde $\alpha = 36^o$.

4. Denotem-se de 1 a 9 os quadradinhos da bandeira, da esquerda para a direita e de cima para baixo. Note-se que se os quadradinhos 2 e 4 forem da mesma cor, há duas escolhas possíveis para a cor do quadradinho 1; se forem de cor diferente, há apenas uma escolha possível. Do mesmo modo, o número de escolhas para as cores dos quadradinhos 3, 7 e 9 depende das cores dos quadradinhos 2 e 6, 4 e 8, 6 e 8, respetivamente. Como todos os quadradinhos pares têm uma cor diferente do quadradinho central, só podem aparecer uma ou duas cores nos quadradinhos pares.

   Se os quadradinhos pares são todos da mesma cor, há três escolhas para essa cor e duas escolhas para a cor de cada uma das casas ímpares. Assim, há $3 \times 2^5 = 96$ bandeiras diferentes.

   Se nos quadradinhos pares há duas cores, há dois casos. Se as cores das casas 2, 4, 8 e 6 estão alternadas, isto é, se, 2 e 8 têm uma cor e 4 e 6 têm outra cor, há três escolhas para a cor da casa 2, duas escolhas para a cor da casa 4 e todos os outros quadradinhos ficam com a cor determinada. Assim, há $3 \times 2 = 6$ bandeiras diferentes.

   Se as cores das casas $2, 4, 8$ e 6 não estão alternadas, entre os pares $(2, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 6)$ e $(6, 2)$ há exatamente dois onde as cores são iguais. Há seis escolhas para esses dois pares, três escolhas para a cor do quadradinho 2, duas escolhas para a outra cor que aparece nos quadradinhos pares e duas escolhas para a cor de dois dos cantos. Para a casa central há uma única escolha possível. Assim, há $6 \times 3 \times 2 \times 2^2 = 144$ bandeiras diferentes.

   Portanto, ao todo há $96 + 6 + 144 = 246$ cidades diferentes.