Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

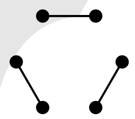
1. Se ao dividir 141 por n se obtém resto 15, então $n > 15$ e existe um inteiro positivo d tal que $141 = n \times d + 15$. Então $n \times d = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

   Logo n pode ser igual a $2 \times 3^2 = 18$, $3 \times 7 = 21$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $3^2 \times 7 = 63$ e $2 \times 3^2 \times 7 = 126$. Conclui-se então que a soma destes números é

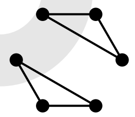
$$18 + 21 + 42 + 63 + 126 = 270.$$

2. Para visualizar as diferentes possibilidades nas relações de amizade entre as 6 pessoas da carruagem, representa-se cada pessoa por um ponto e traça-se um segmento entre 2 pontos para indicar que as pessoas correspondentes são amigas. Há vários casos a considerar.

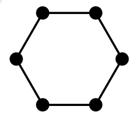
   - <u>Caso 1</u>: todos têm 0 amigos na carruagem. Na nossa representação, isso significa que não há nenhuma ligação entre os 6 pontos. Só há uma forma de isso acontecer.
   - <u>Caso 2</u>: todos têm 1 amigo na carruagem, o que corresponde a juntar as 6 pessoas aos pares, como na seguinte representação.



     O Amílcar pode ter um de 5 amigos possíveis. De entre os quatro restantes passageiros, o primeiro por ordem alfabética pode ter um de 3 amigos possíveis, e o par restante fica determinado. Neste caso, há assim 5×3 possibilidades.
   - <u>Caso 3</u>: todos têm 2 amigos na carruagem. O Amílcar pode ter qualquer um de 10 pares de amigos (BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF e EF, onde cada letra representa a inicial de cada passageiro). Se os amigos do Amílcar forem amigos entre si, então as amizades ficam determinadas e a configuração é a seguinte:



     Se eles não são amigos entre si, então a única configuração possível é a seguinte:

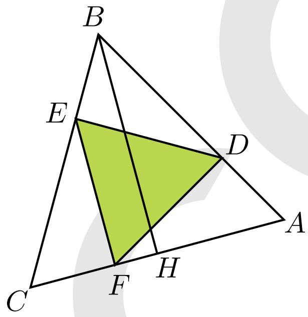


     Neste caso, o primeiro amigo do Amílcar por ordem alfabética pode escoler entre três amigos e o outro pode escolher entre dois amigos. Assim, nesta configuração, há $10 \times 3 \times 2 = 60$ possibilidades. Portanto, neste caso, há $10 + 60 = 70$ possibilidades.
   - <u>Caso 4</u>: todos têm 3 amigos na carruagem. Este caso é similar ao caso em que todos têm 2 amigos, pois ter 3 amigos corresponde a ter 2 "não-amigos", ou seja, também há 70 possibilidades neste caso.
   - <u>Caso 5</u>: todos têm 4 amigos na carruagem. Esse caso corresponde a todos terem 1 "não-amigo", o que dá mais 15 possibilidades.
   - <u>Caso 6</u>: todos têm 5 amigos na carruagem, e só há 1 forma de isso acontecer.

   Portanto, no total há $1 + 15 + 70 + 70 + 15 + 1 = 172$ formas de essas 6 pessoas terem todas o mesmo número de amigos na carruagem.

3. Seja $F\widehat{E}C = \alpha$. Como os ângulos internos de um triângulo equilátero medem $60°$, então, pode-se concluir que $C\widehat{F}E = 180-60-\alpha = 120-\alpha$, que $D\widehat{F}A = 180-60-(120-\alpha) = \alpha$ e que $F\widehat{D}A = 180-60-\alpha = 120-\alpha$. Portanto, pelo Critério ALA, os triângulos $[CEF]$ e $[AFD]$ são congruentes. Do mesmo modo se mostra que o triângulo $[BDE]$ é congruente aos anteriores. Assim, $\overline{AF} = \overline{CE} = \overline{BD} = 2$ e $\overline{CF} = \overline{AD} = \overline{BE} = 1$.

   Solução 1: Considere-se a altura $[BH]$ do triângulo $[ABC]$ relativamente a $[AC]$. Então $\overline{CH} = \dfrac{\overline{AC}}{2} = \dfrac{3}{2}$. Logo $\overline{CE} = \dfrac{2}{3}\overline{BC}$ e $\overline{CF} = \dfrac{2}{3}\overline{CH}$, pelo que os triângulos $[CEF]$ e $[CBH]$ são semelhantes. Portanto $[CEF]$ é um triângulo retângulo em F e, pelo Teorema de Pitágoras tem-se $\overline{EF} = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$. Logo $\overline{BH} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{AC} = 3$, pelo que a área de $[ABC]$ é $\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. A área de cada um dos triângulos $[CEF]$, $[AFD]$ e $[BDE]$ é $\dfrac{\sqrt{3}\times 1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, logo a área de $[DEF]$ é $\dfrac{9\sqrt{3}}{4} - 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.



   Solução 2: Usando o teorema dos cossenos, conclui-se que $\overline{EF} = \sqrt{1^2+2^2-2\times 2\times \cos(60)} = \sqrt{3}$. A altura de $[DEF]$ é assim $\sqrt{3}\sin(60) = \dfrac{3}{2}$. Logo a área de $[DEF]$ é $\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Numerem-se as lâmpadas da circunferência de 1 a 2012, começando na lâmpada inicialmente acesa. Não é difícil verificar que é possível acender apenas a lâmpada central e apagar a inicial, carregando nos interruptores das lâmpadas $1, 3, 4, 6, \ldots$, ou seja, nos interruptores da lâmpadas cujo número é da forma $3k$ e $3k+1$, com k inteiro: cada lâmpada numerada de 2 a 2012 acende-se e apaga-se uma vez, a lâmpada 1 apenas se apaga uma vez, e a lâmpada central muda de estado 1341 vezes, terminando assim acesa.

   Repetindo agora o mesmo processo, numerando agora como lâmpada 1 outra lâmpada qualquer, observa-se que essa lâmpada é a única que termina acesa.

   Portanto, o processo é possível para qualquer uma das lâmpadas.