Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja a o valor da carta mais pequena do Abel e b o da carta mais pequena da Beatriz. Então

$$5a + 10 = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) = b + (b+1) + (b+2) + (b+3) = 4b + 6,$$

o que implica que $5a = 4b - 4 = 4(b-1)$. Logo 5 divide $4(b-1)$, e como é primo com 4 tem de dividir $b-1$, pelo que b é igual a um múltiplo de 5 mais um. Para além disso $b > 100$ e $100 > a + 4 = 4(b-1)/5 + 4$ pelo que $4(b-1) < 96 \times 5 = 480$ e logo $b < 121$. Assim b pode ser 101, 106, 111 ou 116 e temos as quatro possíveis escolhas:

Abel	Beatriz	SOMA
$80, 81, 82, 83, 84$	$101, 102, 103, 104$	410
$84, 85, 86, 87, 88$	$106, 107, 108, 109$	430
$88, 89, 90, 91, 92$	$111, 112, 113, 114$	450
$92, 93, 94, 95, 96$	$116, 117, 118, 119$	470

5. Uma vez que $\overline{AP} = 4\overline{PB}$, podemos afirmar que área $[ABC] = 5\times$ área$[PBC]$, logo área $[PQC] = \frac{4}{25}$ área $[ABC] = \frac{4}{5}$ área $[PBC]$. Como os triângulos $[PBC]$ e $[PQC]$ têm a mesma altura, conclui-se que $\overline{QC} = \frac{4}{5}\overline{BC}$ e, portanto, $\overline{QB} = \frac{1}{5}\overline{BC}$. Assim, os triângulos $[ABC]$ e $[BPQ]$ são semelhantes, pois têm o ângulo em B igual e $\frac{\overline{BC}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$. Logo, o triângulo $[ABC]$ é isósceles e $\overline{BC} = \overline{AC} = l$.

6. Se o número 1 e o número 2 forem escritos na mesma folha, então todos os restantes números estão também nessa folha. Há então, três casos possíveis, consoante a folha usada.

   Se o número 1 for escrito na folha A e o número 2 for escrito na folha B, então o número 3 pode ser colocado em qualquer uma das três folhas.

   - Se o 3 for colocado na folha A, então todos os restantes números são colocados na folha A.
   - Se o 3 for colocado na folha B, então também terão que ser colocados nessa folha os números 5 e todos os números a partir do 7. Os números que sobram (o 4 e o 6) não poderão por isso ser colocados na folha A; há então, dois casos possíveis, nomeadamente, 4 e 6 na folha B, ou 4 na folha C e 6 na folha B.
   - Se o 3 for colocado na folha C, então o número 4 pode ser colocado em qualquer uma das três folhas.
     - Se o 4 for colocado na folha A, então todos os restantes números são colocados na folha A.
     - Se o 4 for colocado na folha B, então também terão que ser colocados nessa folha os números pares, e os números ímpares que sobram não poderão por isso ser colocados nem na folha A nem na folha C.
     - Se o 4 for colocado na folha C, então também terão que ser colocados nessa folha os números 7, 10, 11 e todos os números a partir do 13. Os números que sobram (5, 6, 8 e 9) não poderão ser colocados nem na folha A nem na folha C.

   Então há $1 + 2 + 3 = 6$ casos possíveis. Como A, B e C podem ser escolhidos entre as cores azul, vermelha e amarela de seis formas diferentes, então há $6 \times 6 = 36$ possibilidades.

   Ao todo, há portanto $3 + 36 = 39$ formas diferentes de escrever os números.