XXX OPM - Final - 1° dia - 23.03.2012 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

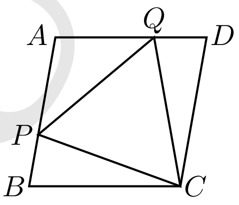
1. (a) Seja x o número de rebuçados com que o Domigos ficou. O António ficou com $2x$ rebuçados e o número de rebuçados de chocolate é $18+19+21+23+25+34-3x = 140-3x$. Uma vez que $140 = 3\times 46+2$, o número de rebuçados de chocolate tem resto 2 na divisão por 3. O único número de $\{18, 19, 21, 23, 25, 34\}$ que verifica esta condição é 23. Assim o número de rebuçados de chocolate é 23. Resposta correta: D)

   (b) Como $3\times 670 = 2010$ há 670 múltiplos de 3 entre 1 e 2012. Como $7\times 287 = 2009$ há 287 múltiplos de 7 entre 1 e 2012. Como $21\times 95 = 1995$ há 95 múltiplos de 21 entre 1 e 2012. Assim o número de inteiros entre 1 e 2002 que não são divisíveis por 3 nem por 7 é $2012-670-287+95 = 1150$. Opção correta: C).

   (c) Observe-se que para cada desenho que o Domingos faz no quadrado do lado esquerdo do visor existe exactamente uma forma de acender alguns segmentos do quadrado do lado direito de modo que o António veja exatamente a mesma figura do ouro lado da mesa. Assim resta contar o número de desenhos diferentes que podem ser feitos no quadrado do lado esquerdo. Como este quadrado é composto por quatro segmentos e cada segmento pode estar aceso ou apagado, existem $2\times 2\times 2\times 2 = 16$ desenhos diferentes neste quadrado. Opção correta: C)

   (d) Em cada centena não se contam 19 metros: os dez números que têm 4 como segundo algarismo e os 9 que têm como último algarismo 4 (sendo que o segundo não é quatro). Assim num milhar temos os 100 números que começam por 4 que não são contados mais 19 por cada centena diferente desta última, ou seja $100+9\times 19 = 271$. Assim até 2000 são contados a mais $271+271 = 542$ m. Até 2012 só se contou um a mais, logo contam-se a mais 543 metros, ou seja o conta-metros deveria marcar $2012-543 = 1469$ metros. Opção correta: C)

2. A disposição dos palitos encontra-se representada na figura seguinte.



Note-se que um quadrilátero com lados iguais é um paralelogramo. Na figura, os pontos A, B, C, D são os vértices do paralelogramo formado por quatro palitos, e P, Q, C são os vértices do triângulo equilátero formado pelos restantes palitos. Pretende-se determinar a amplitude $\alpha = B\hat{A}D$. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 180^o - \alpha$. Note-se que $[PCB]$ é um triângulo isósceles de base $[PB]$, e $[QCD]$ é um triângulo isósceles de base $[QD]$. Logo $B\hat{P}C = C\hat{Q}D = 180^o - \alpha$. Como $[PQC]$ é equilátero, os seus ângulos internos medem 60^o. Portanto, tem-se

$$A\hat{P}Q = 180^o - C\hat{P}Q - B\hat{P}C = 180^o - 60^o - (180^o - \alpha) = \alpha - 60^o,$$

e, do mesmo modo, $A\hat{Q}P = \alpha - 60^o$. Somando os ângulos internos do triângulo $[APQ]$, obtemos

$$\alpha + 2\times(\alpha - 60^o) = 180^o.$$

Resolvendo esta equação, obtem-se $\alpha = 100^o$. Portanto a amplitude de $\angle A$ é 100^o.

3. O algarismo central c de uma cordilheira pode variar de 0 a 8.

   Para um dado valor de c, os algarismos b e d podem variar de $c+1$ até 9. Para um dado valor de b, o algarismo a pode variar de 1 até $b-1$, ou seja, existem $b-1$ possibilidades. Para um dado valor de d, o algarismo e pode variar de 0 até $d-1$, ou seja, existem d possibilidades.

   Assim, para um dado valor de c, existem $c+(c+1)+\cdots+8$ possibilidades para o par (a,b) e existem $(c+1)+(c+2)+\cdots+9$ possibilidades possibilidades para o par (d,e).

   Se $c=0$ há $(0+1+2+3+4+5+6+7+8)\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=1620$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=1$ há $(1+2+3+4+5+6+7+8)\times(2+3+4+5+6+7+8+9)=1584$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=2$ há $(2+3+4+5+6+7+8)\times(3+4+5+6+7+8+9)=1470$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=3$ há $(3+4+5+6+7+8)\times(4+5+6+7+8+9)=1287$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=4$ há $(4+5+6+7+8)\times(5+6+7+8+9)=1050$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=5$ há $(5+6+7+8)\times(6+7+8+9)=780$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=6$ há $(6+7+8)\times(7+8+9)=504$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=7$ há $(7+8)\times(8+9)=255$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Se $c=8$ há $8\times 9=72$ possibilidades para os algarimos a,b,d,e.

   Portanto existem $1620+1584+1470+1287+1050+780+504+255+72=8622$ cordilheiras.