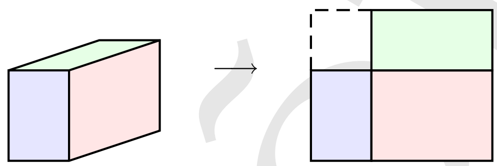
XXVIII OPM - 2ª Eliminatória - 13.01.2010 - Categoria B - 10º/12º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. A aresta menor do paralelepípedo tem de comprimento 1 ou 2 centímetros, pois se cada aresta tivesse pelo menos 3 cm, então cada face teria uma área de pelo menos 9 cm^2 e o paralelepípedo teria uma área total de pelo menos $6 \times 9 = 54$ cm^2. Como as faces opostas de um paralelepípedo têm a mesma área, então a figura formada pelas três faces que rodeiam um vértice tem área total $52/2 = 26$ cm^2. Na figura seguinte está representada a planificação desta figura, obtida através do corte da aresta menor.



O quadrado indicado a tracejado tem de área $1^2 = 1$ ou $2^2 = 4$ cm^2.

No primeiro caso, a área do rectângulo formado pelas três faces da planificação e pelo quadrado é $26+1 = 27$ cm^2. Como os lados deste rectângulo medem um número inteiro de centímetros, maior ou igual a 2, e o seu produto é 27, então os lados do rectângulo medem 3 e 9 centímetros. Logo, neste caso as arestas do paralelepípedo medem $1, 3-1 = 2$ e $9-1 = 8$ cm.

No segundo caso, a área do rectângulo é $26 + 4 = 30$ cm^2. Como os lados deste rectângulo medem um número inteiro de centímetros, maior ou igual a 4, e o seu produto é 30, então os lados do rectângulo medem 5 e 6 centímetros. Logo, neste caso as arestas do paralelepípedo medem $2, 5-2 = 3$ e $6-2 = 4$ cm.

2. Os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ são congruentes, porque um se obtém do outro por rotação. Por essa razão, tem-se $A\hat{C}B = D\hat{C}E = 180° - C\hat{D}E - C\hat{E}D = 180° - 40° - 60° = 80°$. Logo $B\hat{C}D = D\hat{C}A - A\hat{C}B = 90° - 80° = 10°$. Pela mesma razão, tem-se $\overline{CB} = \overline{CE}$, donde se conclui que $C\hat{B}E = C\hat{E}B$. Como $B\hat{C}E = B\hat{C}D + D\hat{C}E = 90°$, tem-se $C\hat{B}E = 45°$. Portanto $B\hat{F}C = 180° - B\hat{C}F - C\hat{B}E = 180° - 10° - 45° = 125°$.

3. Sejam A, B, C e D os números escritos pelo Carlos. Ao perguntar qual a paridade das somas das três combinações em que A está presente, $\{A, B, C\}$, $\{A, C, D\}$ e $\{A, B, D\}$, o Luís descobre a paridade de A já que a soma destas 3 combinações, $3A + 2B + 2C + 2D$, cuja paridade o Luís conhece, tem paridade igual à de A. As três respostas que obtém permitem-lhe ainda determinar as paridades relativas de B, C e D: a paridade de $(A+B+C) - (A+C+D) = B - D$ determina se B e D têm a mesma paridade e a paridade de $(A+B+C) - (A+B+D) = C - D$ determina se C e D têm a mesma paridade.

No entanto, estas 3 perguntas não determinam a paridade de todos os números escritos pelo Carlos. Por exemplo, se as respostas obtidas forem todas "PAR", então é possível que todos os números sejam pares ou que apenas A seja par e os outros 3 sejam ímpares. Como a ordem pela qual o Carlos escreve os números é arbitrária, a escolha de A não nos faz perder generalidade, pelo que não é possível que o Luís saiba com certeza qual a paridade de todos os números escritos pelo Carlos após fazer apenas 3 perguntas.

Para saber a paridade dos outros números, o Luís deve perguntar também qual a paridade da soma de $\{B, C, D\}$. A paridade de $(B+C+D)+(A+B+C)+(A+B+D) = 2A+3B+2C+2D$ determinará a paridade de B e, consequentemente, a de C e D também. Assim, só ao fazer ao Carlos 4 perguntas, esgotando as possibilidades que tem, o Luís tem a certeza de conseguir descobrir as paridades de cada um dos 4 números escritos pelo Carlos.

4. Pretende-se encontrar todos os pares de inteiros (n, m), com três algarismos, tais que $1000m + n = kmn$, para algum k natural. Então $n = (kn - 1000)m$ é múltiplo de m. Como n, m têm ambos três algarismos, então $n = tm$, com $1 \leq t \leq 9$. Por outro lado, $1000m = (km - 1)n$ é múltiplo de $n = tm$, ou seja, 1000 é múltiplo de t. Deste modo $t \in \{1, 2, 4, 5, 8\}$. Como $n = tm$, então $1000m + tm = kmn$, ou seja, $1000 + t = kn$. Assim n é um divisor de $1000 + t$, múltiplo de t, e maior ou igual a $100t$, uma vez que $m = n/t \geq 100$.

   Para $t = 1$, o único divisor de 1001 com três algarismos é 143, logo $n = 143$ e $m = 143$. De facto, tem-se $143143 = 7 \times 143 \times 143$.

   Para $t = 2$, os divisores de 1002 com três algarismos são 167, 334 e 501. O único que é múltiplo de 2 é 334, logo $n = 334$ e $m = 334/2 = 167$. De facto, tem-se $167334 = 3 \times 167 \times 334$.

   Para $t = 4$, os divisores de 1004 com três algarismos são 251 e 502, que não são múltiplos de 4, logo neste caso não há soluções.

   Para $t = 5$, todos os divisores de 1005 com três algarismos são inferiores a 500, logo neste caso não há soluções.

   Para $t = 8$, todos os divisores de 1008 com três algarismos são inferiores a 800, logo neste caso não há soluções.

   Assim, as únicas soluções são os pares $(n, m) = (143, 143)$ e $(n, m) = (334, 167)$.