Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja $P(n)$ o produto dos dígitos não nulos de n, e seja $P(0) = 1$. Estamos interessados em calcular $P(1) + P(2) + \cdots + P(2009)$. Facilmente verificamos que,

$$(0+1+\cdots+9)(0+1+\cdots+9)(0+1+\cdots+9) = 0\times 0+0\times 1+\cdots+9\times 9\times 9$$

dá a soma do produto dos algarismos dos números de 0 a 999, escritos com três algarismos. Para termos o produto dos algarismos não nulos basta trocar os zeros por uns, ou seja,

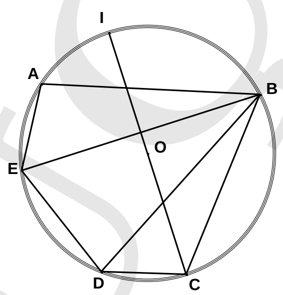
$$P(0)+P(1)+\cdots+P(999) = (1+1+2+\cdots+9)^3 = 46^3$$

Temos também que, se $n \leq 1000$, $P(1000+n) = P(n)$. Logo,

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(2009) = 2\times(P(0)+P(1)+\cdots+P(999))-P(0)+P(2000)+P(2001)+\cdots+P(2009) =$$

$$= 2\times 46^3 - 1 + 2(1+1+2+\cdots+9) = 2\times 46^3 + 91 = 194763.$$

5. Seja I o outro ponto de intersecção de OC com a circunferência. Como $[CI]$ é um diâmetro da circunferência perpendicular a $[EB]$, tem-se que $\overset{\frown}{EI}=\overset{\frown}{IB}$.



Por outro lado, $[CI]$ é paralelo a $[AD]$, logo $\overset{\frown}{AI}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{EA}$, uma vez que $A\hat{B}E = D\hat{B}C$ e, consequentemente, $\overset{\frown}{EB}= 2\ \overset{\frown}{EI}= 4\ \overset{\frown}{EA}$. Uma vez que $E\hat{A}B = 100°$, tem-se que $\overset{\frown}{EB}= 360° - 200° = 160°$ e conclui-se que $\overset{\frown}{EA}= 40°$. Como $\overset{\frown}{EA}= 2A\hat{B}E$, tem-se que $A\hat{B}E = 20°$.

6. Sejam n o número de participantes nas Olimpíadas, x o número de conchas dadas pela Catarina a cada um dos restantes $n-1$ participantes e y o número de conchas dadas pelo Pedro a cada um dos outros $n-1$ participantes. Uma vez que a Catarina e o Pedro receberam a mesma quantidade de conchas dadas pelos restantes $n-2$ participantes, a diferença entre o número final de conchas da Catarina e do Pedro depende apenas do número de conchas que estes deram um ao outro e do número total de conchas que deram. Assim, $108-11 = [-x(n-1)+y] - [-y(n-1)+x]$, ou seja, $97 = n(y-x)$. Como 97 é primo e $n > 1$ tem que ser $n = 97$, isto é, nas Olimpíadas de Construções na Areia participaram 97 concorrentes.