Cada questão vale 10 pontos

*Sugestões para a resolução dos problemas*

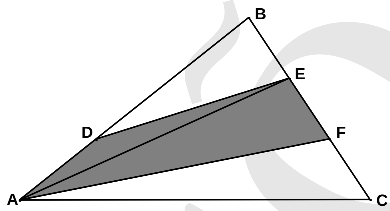


1. Se o Jorge tivesse obtido mais do que $6$ pontos, então os três primeiros classificados juntos teriam obtido mais do que $18$ pontos. Mas tal não é possível, uma vez que nos $6$ jogos do torneio foram atribuídos no máximo $3 \times 6 = 18$ pontos.

   Por outro lado, o Jorge pode ter obtido $6$ pontos. Tal aconteceu se um dos seus amigos tiver perdido três jogos e cada um dos três jogos restantes tiver tido um vencedor diferente (perdendo o Jorge o sorteio final).

   Logo o Jorge pode ter obtido no máximo $6$ pontos.

2. A área da região $[ADEF]$ obtém-se somando as áreas dos triângulos $[AEF]$ e $[ADE]$.




   Como os pontos $E$ e $F$ dividem o lado $[BC]$ em três partes iguais, então a área de cada um dos triângulos $[ABE]$, $[AEF]$ e $[AFC]$ é um terço da área do triângulo $[ABC]$, ou seja, $3$ cm$^2$. Por outro lado, uma vez que $[AD]$ mede um terço do comprimento de $[AB]$, a área de $[ADE]$ é um terço da área de $[ABE]$, ou seja, $1$ cm$^2$. Logo a área da região sombreada é $4$ cm$^2$.

3. Sejam $x$ a minha idade actual, $y$ a idade actual do meu pai e $k$ a idade actual da minha irmã. Então têm-se as igualdades

$$5(x-k) = y-k \qquad 4(x-1) = y-1 \qquad \text{e} \qquad 3(x+k) = y+k.$$

   Da segunda igualdade vem $y = 4x-3$. Substituindo na primeira igualdade tem-se $5(x-k) = 4x-3-k$, ou seja, $x = 4k-3$. Por fim, substituindo na terceira igualdade deduz-se que $3((4k-3)+k) = 4(4k-3)-3+k$, ou seja, $k = 3$. Assim, $x = 4k-3 = 9$.

   Portanto, eu tenho $9$ anos (e já agora, o meu pai tem $33$ anos e a minha irmã tem $3$).

4. **Solução 1**

   Seja $abc$ a representação decimal da soma $M+N$. Então pode-se concluir que:

   - o primeiro algarismo de $N$ e $M$ não é $a$;
   - o terceiro algarismo de $N$ ou $M$ pode ser $c$ apenas no caso de o restante terceiro algarismo ser $0$;
   - o segundo algarismo de $N$ ou $M$ pode ser $b$ apenas no caso de o restante segundo algarismo ser $9$;

Então têm-se as seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{rccc} & b & a & 0 \\ + & b & a & 0 \\ \hline & a & b & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rccc} & c & a & b \\ + & c & a & b \\ \hline & a & b & c \end{array} \quad \begin{array}{rccc} & c & a & b \\ + & b & c & a \\ \hline & a & b & c \end{array} \quad \begin{array}{rccc} & c & 9 & b \\ + & c & b & 9 \\ \hline & 9 & b & c \end{array} \quad \begin{array}{rccc} & c & 9 & a \\ + & c & 9 & a \\ \hline & a & 9 & c \end{array} \quad \begin{array}{rccc} & b & c & a \\ + & b & c & a \\ \hline & a & b & c \end{array}$$

No primeiro caso, obtém-se a equação $200b + 20a = 100a + 10b$, ou seja, $19b = 8a$, que é impossível.

No segundo caso, obtém-se a equação $2N = 10N - 1000c + c$, ou seja, $8N = 999c$, que é impossível.

No terceiro caso, obtém-se $a = b + c + 1$ e $c = a + b - 10$, pelo que $c = 2b + c - 9$, ou seja, $2b = 9$, que é impossível.

No quarto caso, obtém-se $c = 4$ e $b = 5$, que correspondem aos números flexíveis $495$ e $459$.

No quinto caso, obtém-se $a = 2c + 1$, $c = 2a - 10$, pelo que $c = 4c - 8$, ou seja, $3c = 8$, que é impossível.

No sexto caso, obtém-se a equação $2N = (N - a)/10 + 100a$, ou seja, $19N = 999a$, que é impossível.

Portanto os únicos números flexíveis são $495$ e $459$.

### Solução 2

Cada algarismo de $M + N$ obtém-se somando os algarismos de $M$ e $N$ nas mesmas posições. Quando esta soma é superior a $9$, retira-se $10$ a esta soma e soma-se $1$ à soma que estiver na posição imediatamente à esquerda (usualmente diz-se "e vai um"), ou seja, retira-se $9$ à soma dos três algarismos de $M$ e $N$. Designe-se por $S_x$ a soma dos algarismos do número $x$. Então

$$S_{M+N} = S_M + S_N - 9k,$$

onde $k$ é o número de vezes que ocorre a operação "e vai um". Como $S_M = S_N = S_{M+N}$, então $S_N = 9k$. Como $N$ tem três algarismos, então $S_N \leq 27$, logo $1 \leq k \leq 3$. Mas se $k = 3$, então $N$ teria que ser $999$, que não é flexível. Falta, portanto, ver os casos $k = 1$ e $k = 2$.

- Caso $k = 1$.

  Como $S_N = 9$, a operação "e vai um" só pode ocorrer quando se soma o maior algarismo de $N$ com ele próprio. Olhando apenas para a posição deste algarismo, têm-se os casos $5 + 5 = 0$, $6 + 6 = 2$, $7+7 = 4$, $8+8 = 6$ e $9+9 = 8$. No primeiro caso, o terceiro algarismo é $9-5-0 = 4$ e no segundo caso o terceiro algarismo é $9 - 6 - 2 = 1$. Mas não há números flexíveis formados pelos algarismos $\{5, 0, 4\}$ ou $\{6, 2, 1\}$. Nos três últimos casos, a soma dos três algarismos ultrapassa $9$.
- Caso $k = 2$.

  Como $S_N = 18$, a operação "e vai um" ocorre nas duas posições à direita.

  Se o maior algarismo de $N$ for somado com ele próprio temos novamente os casos $5 + 5 = 0$, $6 + 6 = 2$, $7 + 7 = 4$, $8 + 8 = 6$ e $9 + 9 = 8$. Nos dois primeiros casos, a soma dos algarismos é menor que $18$. Nos casos seguintes, o terceiro algarismo é, respectivamente, $7$, $4$ e $1$ e não há números flexíveis formados pelos algarismos $\{7, 4, 7\}$, $\{8, 6, 4\}$ ou $\{9, 8, 1\}$.

  Se o maior algarismo $a$ de $N$ for somado com outro algarismo $b$, então na sua soma surge o terceiro algarismo $c$. Então $a + b = 10 + c$ e $a + b + c = 18$, logo $c = 4$. Olhando apenas para a posição deste algarismo, têm-se os casos $8 + 6 = 4$ e $9 + 5 = 4$. No primeiro caso, não há números flexíveis formados pelos algarismos $\{8, 6, 4\}$. O terceiro caso dá origem à solução $459 + 495 = 954$.

Portanto os únicos números flexíveis com três algarismos são $459$ e $495$.