XXVI OPM - Final - 1º dia - 14.03.2008 - Categoria A

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Em cada uma das alíneas seguintes escolhe a opção correcta, justificando a tua escolha.

(a) O João e a Célia participam nos Sábados à Descoberta no Museu da Ciência. Um dos desafios matemáticos propostos consiste em pesar alguns minerais de igual volume numa balança de dois pratos. Sabendo que três ágatas e um jade pesam tanto como nove olhos de tigre e que cinco ágatas pesam tanto como três jades e um olho de tigre, quantos olhos de tigre pesam tanto como dois jades?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(b) Para ir da Escola Secundária José Falcão ao Museu da Ciência o João demora 15 minutos. Sabendo que o João demora tanto tempo a dar 9 passos como a Célia a dar 10 e que cada passo da Célia tem metade do comprimento de cada passo do João, quantos minutos demora a Célia a fazer o mesmo percurso?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 32 E) 36

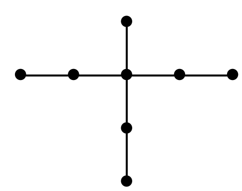
(c) Resolve o desafio geométrico que foi proposto à Célia:

No quadrado $[ABCD]$ o lado $[AB]$, de comprimento 12 m, está dividido em três segmentos iguais, $[AE]$, $[EF]$ e $[FB]$. Os segmentos $[EC]$ e $[FD]$ intersectam-se em H. Qual é a área do triângulo $[HCD]$?

A) 36 m^2 B) 42 m^2 C) 48 m^2 D) 54 m^2 E) 72 m^2

(d) Resolve o desafio combinatório que foi proposto ao João:

Qual é o número máximo de triângulos com vértices nos pontos da figura que é possível construir?



A) 8 B) 12 C) 18 D) 24 E) 42

2. A Evelina tem de preparar o cenário para a festa da escola. Ela precisa de uma lua em quarto crescente e tem um cartão circular de raio r. Ela coloca a ponta do compasso sobre a circunferência do cartão, desenha um arco de raio $r\sqrt{2}$ e corta o cartão por essa linha que traçou. Qual é a área da lua obtida pela Evelina?

3. Num quadriculado com 3 linhas e 10 colunas escrevem-se na primeira linha e por ordem crescente os números de 1 a 10. Depois de preencher a segunda linha com os números de 1 a 10 agora dispostos por uma qualquer ordem, em cada quadrícula da terceira linha escreve-se a soma dos números colocados nas duas quadrículas acima. Existirá uma forma de preencher a segunda linha de modo que os algarismos das unidades dos números da terceira linha sejam todos distintos?

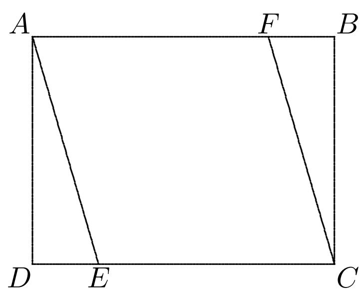
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. A toca de um coelho é um ponto de uma recta. O coelho salta para a frente e para trás nessa recta segundo as regras seguintes:

   - se a distância d, em metros, do coelho à toca não é superior a um metro, então, depois de saltar uma vez, a sua distância à toca aumentará para $2d$ metros, podendo ficar do mesmo lado ou do outro lado da toca;
   - se a distância d, em metros, do coelho à toca é superior a um metro, então depois de saltar uma vez, a sua distância à toca diminuirá para $1/d$ metros, ficando do outro lado da toca.

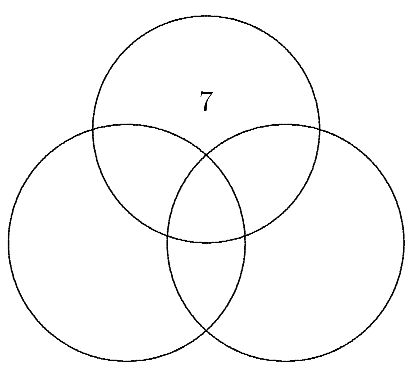
   De quantos modos distintos pode o coelho ficar a 80 cm da toca, dando exactamente cinco saltos?

5. No rectângulo $[ABCD]$ representado na figura, $\overline{AB} = 16$, $\overline{BC} = 12$ e $[AFCE]$ é um losango. Determina $\overline{EF}$.



6. O Nuno resolveu rapidamente o seguinte quebra-cabeças:

   Preenche as seis regiões vazias da figura com os números de um a seis de modo a que a soma dos números dentro de cada circunferência seja a mesma.



   Sem pressas, a irmã do Nuno encontrou todas as soluções possíveis para o quebra-cabeças, mas nunca conseguiu que a soma dentro de cada uma das circunferências fosse maior do que a soma obtida pelo Nuno. Qual foi a soma obtida pelo Nuno?

Sugestões para a resolução dos problemas

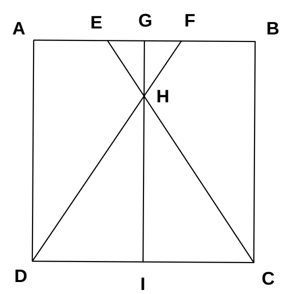
1. (a) Quinze ágatas pesam tanto como 9 jades e 3 olhos de tigre. Mas 15 ágatas e 5 jades pesam tanto como 45 olhos de tigre. Logo, 9 jades, 3 olhos de tigre e 5 jades pesam tanto como 45 olhos de tigre, ou seja, 14 jades pesam tanto como 42 olhos de tigre. Portanto, um jade pesa tanto como 3 olhos de tigre e dois jades pesam tanto como 6 olhos de tigre.

   Opção correcta: D).

   (b) No período de tempo em que a Célia dá 10 passos, o João percorre $2 \times 9 = 18$ vezes o comprimento do passo da Célia, ou seja, no mesmo período de tempo em que a Célia dá 1 passo, o João percorre $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ vezes o comprimento do passo da Célia. Logo, a Célia demora $\frac{9}{5}$ vezes mais tempo do que o João a percorrer a mesma distância. Portanto, a Célia demora $\frac{9}{5} \times 15 = 27$ minutos a fazer o percurso.

   Opção correcta: B).

   (c) Sejam G e I os pontos de intersecção de $[AB]$ e $[CD]$ com a recta perpendicular a $[AB]$ que passa por H, respectivamente.



   Por um lado, os triângulos $[EFH]$ e $[CDH]$ são semelhantes, logo, $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{EH}}{\overline{HC}}$ e, consequentemente, $\overline{HC} = 3\,\overline{EH}$.

   Solução 1: Por outro lado, os triângulos $[EGH]$ e $[CIH]$ são semelhantes logo, $\dfrac{\overline{HC}}{\overline{EH}} = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{GH}}$ e, consequentemente, $\overline{HI} = 3\,\overline{GH}$.

   Solução 2: Por outro lado, os triângulos $[AFD]$ e $[BEC]$ são congruentes logo, os ângulos internos do triângulo $[DHC]$, em C e D, também são congruentes e, consequentemente, o triângulo $[DHC]$ é isósceles e I é o ponto médio de $[DC]$ e $\overline{IC} = 6$. De modo análogo se conclui que G é o ponto médio de $[EF]$ e $\overline{EG} = 2$. Além disso, os triângulos $[EGH]$ e $[CIH]$ são semelhantes logo, $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{EG}} = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{GH}}$ e, consequentemente, $\overline{HI} = 3\,\overline{GH}$.

   Dado que $[GI]$ é paralelo a $[AD]$, tem-se $\overline{GI} = 12$, $\overline{GH} = \dfrac{\overline{GI}}{4} = 3$ e $\overline{HI} = 9$.

   Assim, a área do triângulo $[HCD]$ é $\dfrac{\overline{DC} \times \overline{HI}}{2} = 54$ m^2.

   Opção correcta: D).

(d) Designe-se por ponto central o ponto de intersecção da linha vertical com a linha horizontal.

Um triângulo tem de ter dois vértices sobre a linha vertical ou dois vértices sobre a linha horizontal.

Comece-se por contar os triângulos em que nenhum dos vértices é o ponto central. Há três maneira de escolher dois pontos sobre a linha vertical, de modo que nenhum deles seja o ponto central. Como há quatro pontos na linha horizontal diferente do ponto central, é possível construir $3 \times 4 = 12$ triângulos com dois vértices sobre a linha vertical e um sobre a linha horizontal.

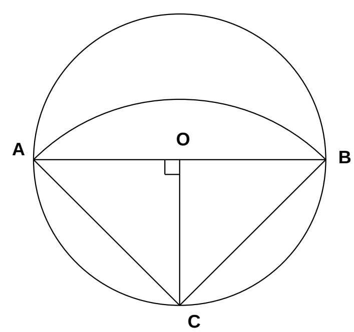
De modo análogo, há seis maneiras de escolher dois pontos sobre a linha horizontal, de modo a que nenhum dos dois seja o ponto central e há três pontos na linha vertical diferentes do ponto central. Por isso, é possível construir $6 \times 3 = 18$ triângulos com dois vértices sobre a linha horizontal e um sobre a linha vertical. Assim, é possível construir $12 + 18 = 30$ triângulos tal que nenhum dos vértices é o ponto central.

Por fim, note-se que um triângulo em que o ponto central é um dos vértices, tem os outros dois vértices, um sobre a linha vertical e o outro sobre a linha horizontal. Então, é possível construir $3 \times 4 = 12$ triângulos nestas condições.

Portanto, o número de triângulos que é possível construir com vértices nos pontos da figura é $12+18+12 = 42$.

Opção correcta: E).

2. Sejam A, B e C pontos na circunferência de centro O do cartão circular tais que $[AB]$ é um diâmetro e $\measuredangle AOC$ é recto.



Pelo teorema de Pitágoras, uma vez que $\overline{AO} = \overline{OC} = \overline{OB} = r$, tem-se $\overline{BC} = \overline{AC} = r\sqrt{2}$. Se a ponta do compasso for colocada no ponto C, as extremidades do arco de raio $r\sqrt{2}$ traçado são os pontos A e B. A área da lua é igual à área do semi-círculo de raio r menos a área da região limitada por $[AB]$ e pelo arco AB da circunferência de raio $r\sqrt{2}$. Uma vez que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência de raio r, o $\measuredangle ACB$ é recto logo, a área da região referida é igual a um quarto da área do círculo de raio $r\sqrt{2}$ menos a área do triângulo rectângulo $[ACB]$, ou seja, $\frac{1}{4}\pi(r\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}\left(r\sqrt{2}\right)^2 = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. Finalmente tem-se que a área da lua é igual a $\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = r^2$.

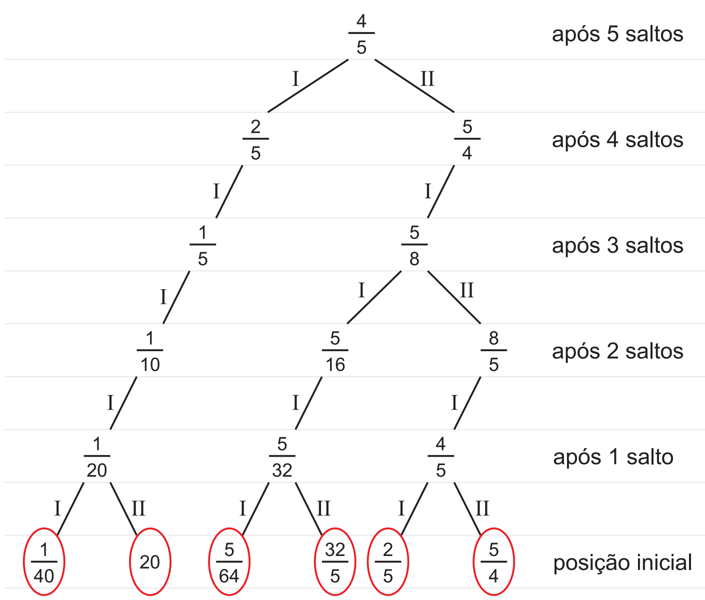
3. A soma dos números de cada uma das duas primeiras linhas é 55, logo a soma dos números da última linha é $2 \times 55 = 110$. Se os algarismos das unidades dos números da terceira linha fossem todos distintos, então a sua soma seria um número ímpar, uma vez que surgiriam 5 números pares e 5 números ímpares. Portanto, não existe nenhuma forma de preencher a segunda linha nas condições exigidas.

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja d a distância do coelho à toca. Segundo as regras, se $d \in]0,1]$, então, depois de dar um salto (do tipo I), o coelho estará num dos dois pontos que estão à distância $d' = 2d$ da toca e $d' \in]0,2]$. Se $d \in]1,2]$, então, depois de dar um salto (do tipo II), o coelho estará no ponto que está no lado oposto à toca, à distância $d' = 1/d$ desta e $d' \in]1/2,1]$. Assim, sempre que a distância do coelho à toca pertença ao intervalo $[0,1/2[\cup[1,2]$, sabe-se que o salto anterior foi do tipo I. No caso de a distância do coelho à toca estar no intervalo $[1/2,1[$, então o salto anterior pode ter sido do tipo I ou II.

Note-se que o ponto de partida do coelho pode ser um ponto que está a uma distância maior do que dois da toca mas, após o primeiro salto, o coelho ficará a uma distância não superior a dois da toca e assim permanecerá ao longo dos saltos seguintes.

Sabendo que após 5 saltos o coelho está a $0,8 = \frac{4}{5}$ m da toca, podem determinar-se os possíveis tipos de saltos e as respectivas distâncias anteriores do coelho à toca (observe-se o esquema seguinte). A última linha contém todas as possíveis distâncias iniciais do coelho à toca.



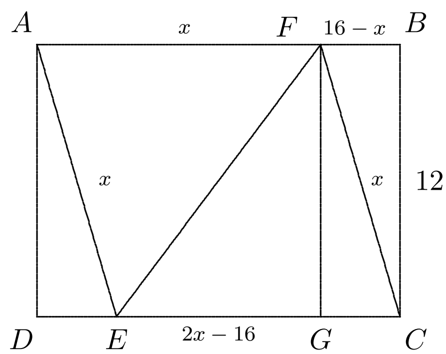
Há seis possíveis sequências de saltos de um tipo e de outro:

- I, I, I, I, I - Inicialmente o coelho está a $\frac{1}{40}$ m da toca em qualquer um dos lados, logo, neste caso, há duas posições de partida possíveis. Como após cada salto do tipo I há sempre dois possíveis pontos de chegada, excepto no último salto porque a chegada é um ponto determinado, existem 2^5 caminhos distintos.
- II, I, I, I, I - Inicialmente o coelho está a 20 m da toca em qualquer um dos lados, logo, neste caso, há duas posições de partida possíveis. Como após cada salto do tipo I há sempre dois possíveis pontos de chegada, excepto no último salto porque a chegada é um ponto determinado, existem 2^4 caminhos distintos.
- I, I, I, I, II - Inicialmente o coelho está a $\frac{5}{64}$ m da toca em qualquer um dos lados, logo existem 2^4 caminhos distintos.
- II, I, I, I, II - Inicialmente o coelho está a $\frac{32}{5}$ m da toca em qualquer um dos lados, logo existem 2^3 caminhos distintos.

- I, I, II, I, II - Inicialmente o coelho está a $\frac{2}{5}$ m da toca em qualquer um dos lados, logo existem 2^3 caminhos distintos.
- II, I, II, I, II - Inicialmente o coelho está a $\frac{5}{4}$ m da toca em qualquer um dos lados, logo existem 2^2 caminhos distintos.

Portanto, no total há $2^5 + 2^4 + 2^4 + 2^3 + 2^3 + 2^2 = 84$ modos diferentes de o coelho chegar a um ponto que está a 80 cm da toca num dos lados.

5. Seja x o comprimento do lado do losango $[AFCE]$.



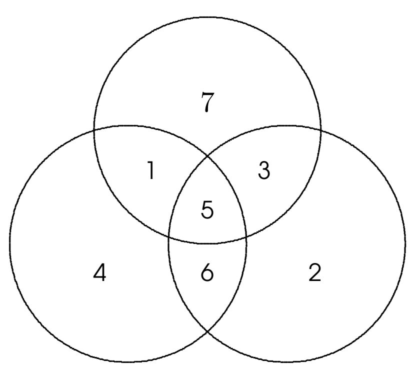
Pelo Teorema de Pitágoras tem-se, $x^2 = \overline{FC}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{BC}^2 = (16-x)^2 + 12^2$, logo $x = \dfrac{25}{2}$.

Solução 1: Seja G o pé da perpendicular a DC que passa por F. Como $\overline{DE} = \overline{GC} = 16 - x$, tem-se $\overline{EG} = 2x - 16$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[EGF]$ tem-se $(\overline{EF})^2 = (2x-16)^2 + 12^2 = 9^2 + 12^2$, ou seja, $\overline{EF} = 15$.

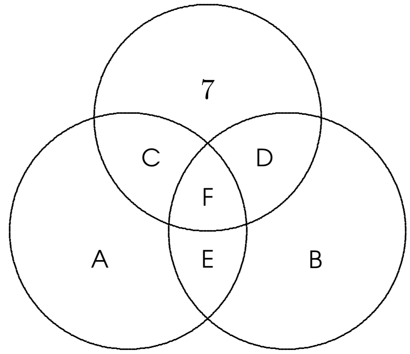
Solução 2: A diagonal $[AC]$ do losango mede $\sqrt{16^2 - 12^2} = 20$ e é perpendicular à diagonal $[EF]$. Assim, a altura do triângulo $[AFE]$ relativamente ao lado $[EF]$ mede 10. Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se $\left(\dfrac{\overline{EF}}{2}\right)^2 + 10^2 = \left(\dfrac{25}{2}\right)^2$, ou seja, $\overline{EF} = 15$.

Solução 3: A diagonal $[AC]$ do losango mede $\sqrt{16^2 - 12^2} = 20$ e é perpendicular à diagonal $[EF]$. Assim, a altura do triângulo $[AFE]$ relativamente ao lado $[EF]$ mede 10. Por um lado, a área do losango $[AFCE]$ é igual $\overline{EC} \times 12 = 150$, por outro lado é igual à soma das áreas dos triângulos $[AFE]$ e $[FCE]$. Estes triângulos têm altura igual a 10 relativamente à base $[EF]$, portanto área de $[AFCE] = 2 \times \dfrac{\overline{EF} \times 10}{2} = 150$, ou seja, $\overline{EF} = 15$.

6. Note-se primeiro que é possível dispor os números de 1 a 6 de modo a obter a soma 16 dentro de cada circunferência:



No entanto, não é possível obter uma soma superior a 16 em cada circunferência. De facto, sejam A,B,C,D,E e F números distintos de 1 a 6 dispostos como se indica na figura seguinte



e designe-se por S a soma dos números colocados dentro de cada uma das circunferências. Então

$$3S = 7 + A + B + 2(C + D + E) + 3F$$

cujo valor máximo é $7+1+2+2(3+4+5)+3\times 6 = 52$, pelo que o valor máximo de S não pode ser superior a 17. Suponha-se então que $S = 17$. Se nem A nem B fossem 1, então $3S \leq 7+2+3+2(1+4+5)+3\times 6 = 50$, logo pode supor-se sem perda de generalidade que $A = 1$. Mas então teria que ser $C + F + E = 16$, o que não é possível uma vez que $C + F + E \leq 6 + 5 + 4 = 15$.

A soma obtida pela Sara foi assim 16.