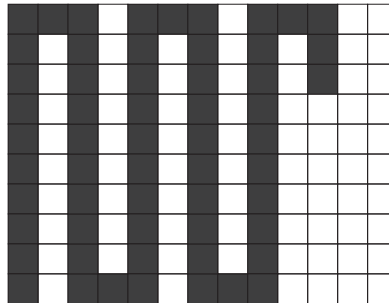


Duração: 2 horas  
Cada questão vale 10 pontos

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.*

1. O João pintou de preto 2007 casas de um tabuleiro quadriculado com 10 linhas e 500 colunas. Começou na casa inferior esquerda e seguiu o modelo sugerido pela figura. Quantas casas não pintadas ficaram com, pelo menos, dois lados em comum com casas pretas?



2. Todos os dias, o João, o Vasco e a Eloísa treinam juntos numa pista circular. A Eloísa corre sempre com o dobro da velocidade do João e com o triplo da velocidade do Vasco. Um dia os três amigos resolveram fazer uma corrida mas a Eloísa, no momento da partida, começou a correr na direcção contrária à do João e do Vasco. Quando a Eloísa chegou ao fim da primeira volta deu a corrida por terminada e, em tom de desafio, disse-lhes que tinha percorrido 20 metros desde o momento em que se tinha cruzado com o João até ao momento em que se tinha cruzado com o Vasco. Em poucos minutos, o João e o Vasco conseguiram determinar o comprimento da pista. Quantos metros tem a pista?
3. Seja  $[ABC]$  um triângulo equilátero e  $P$  o ponto de  $[AC]$  tal que  $\overline{PC} = 1$ . A recta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $AC$  intersecta  $[BC]$  em  $M$  e a recta  $AB$  em  $Q$ . O ponto médio de  $[QM]$  é  $N$  e  $\overline{BN} = 10$ . Determina o comprimento do lado do triângulo  $[ABC]$ .
4. O Jeremias é um lagarto que se desloca verticalmente sobre um tronco, em cada dia ou sobe ou desce. O dia do mês é igual ao número de metros que o Jeremias faz no seu percurso diário: um metro no dia 1, dois metros no dia 2 e assim sucessivamente ao longo do mês. O Jeremias pretende estar, ao fim de um mês, no mesmo lugar donde partiu. Indica para que meses do ano de 2007 isto é possível e os movimentos que ele deve fazer para o conseguir.