XXIX OPM - Final - 2º dia - 09.04.2011 - Categoria A - 8º/9º

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. A Augusta tem mais $70/5 = 14$ moedas de 5 cêntimos do que de 10 cêntimos. Assim tem $14 + \frac{100-14}{2} = 57$ moedas de 5 cêntimos e 43 moedas de 10 cêntimos, ou seja $57 \times 0,05 + 43 \times 0,10 = 7,15$ euros.

5. Seja F o pé da altura de $[ABC]$ relativamente ao lado $[AC]$.

   Uma vez que $\overline{AB} = \overline{AC}$, tem-se $A\hat{B}C = A\hat{C}B$.

   Resolução 1: Os triângulos $[PEB]$ e $[PDC]$ são semelhantes, pois são ambos rectângulos e $E\hat{B}P = D\hat{C}P$. Assim,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = 4.$$

   Por outro lado, também os triângulos $[BFC]$ $[PDC]$ são semelhantes pois têm os três lados paralelos, por isso,

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}}.$$

   Agora é necessário considerar dois casos. Se P pertence a $[BC]$, então $\overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PC}$ e

$$\overline{BF} = \overline{PC} \times \frac{\overline{BP} + \overline{PC}}{\overline{PC}} = 8 \times (\frac{1}{4} + 1) = 10.$$

   Se P não pertence a $[BC]$, então $\overline{BC} = \overline{PC} - \overline{BP}$, e

$$\overline{BF} = \overline{PD} \times \frac{\overline{PC} - \overline{BP}}{\overline{PC}} = 8 \times (1 - \frac{1}{4}) = 6.$$

   Resolução 2: Seja G o pé da perpendicular de B sobre PD. Os triângulos $[GBP]$ e $[DCP]$ são semelhantes, pois têm os três lados paralelos, logo $G\hat{B}P = A\hat{C}B = A\hat{B}C = P\hat{B}E$. Assim, é possível afirmar que os triângulos rectângulos $[GBP]$ e $[EBP]$ são semelhantes e como partilham a diagonal, são congruentes. Portanto $\overline{PG} = \overline{PE} = 2$.

   Agora é necessário considerar dois casos. Se P pertence a $[BC]$, então

$$\overline{BF} = \overline{DG} = \overline{PD} + \overline{PG} = 8 + 2 = 10.$$

   Se P não pertence a $[BC]$, então

$$\overline{BF} = \overline{DG} = \overline{PD} - \overline{PG} = 8 - 2 = 6.$$

6. Se 1000 se escreve como soma de um número ímpar $2k+1$ de naturais consecutivos, então

$$1000 = (a-k)+(a-k+1)+\cdots+(a-1)+a+(a+1)+\cdots+(a+k-1)+(a+k) = a(2k+1),$$

logo $2k+1$ é um divisor ímpar de 1000. Como $1000 = 2^3 \times 5^3$, os divisores ímpares de 1000 são 5, 25 e 125.

Se $2k+1=5$, então $k=2$ e $a=200$, que corresponde à soma $1000 = 198+199+200+201+202$.

Se $2k+1=25$, então $k=12$ e $a=40$, que corresponde à soma $1000 = 28+29+\cdots+51+52$.

Se $2k+1=125$, então $k=62$ e $a=8$, que corresponde a nenhuma solução do problema porque $a-k=-54$ não é um número natural.

Se 1000 se escreve como soma de um número par $2k$ de naturais consecutivos, então

$$1000 = a+a+1+\cdots+(a+k-1)+(a+k)+\cdots+(a+2k-2)+(a+2k-1) = (2a+2k-1)k,$$

logo $2a+2k-1$ é um divisor ímpar de 1000.

Se $2a+2k-1=5$, então $a=-197$ e $k=200$, que não corresponde a nenhuma solução do problema.

Se $2a+2k-1=25$, então $a=-27$ e $k=40$, que não corresponde a nenhuma solução do problema.

Se $2a+2k-1=125$, então $a=55$ e $k=8$, que corresponde à soma $1000=55+56+\cdots+70$.