XXIX OPM - Final - 1º dia - 09.04.2011 - Categoria A - 8º/9º

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2,3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Uma vez que $G + A = 25 - 5 = 20$, tem-se que B representa 5 e $R + I = 20$ e E representa 5. Por outro lado $E + L = 25 - 7 = 18$ e I representa 7. Portanto R representa 13. Opção correcta: D).

   (b) Sejam G e H os pontos de intersecção do segmento $[DB]$ com os segmentos $[AE]$ e $[AF]$, respectivamente. Notemos a, b e f as medidas dos ângulos $\angle FAD, \angle EBF$ e $\angle AFB$, respectivamente. Se somarmos as medidas dos ângulos internos dos triângulos $[DAG]$ e $[EGB]$ e usarmos o facto de os ângulos $\angle DGA$ e $\angle BGE$ serem congruentes, obtemos $2a + 60 = 180 - D\hat{G}A = 180 - B\hat{G}E = 2b + 80$, logo, $a = b + 10$. Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio aos triângulos $[DAH]$ e $[FHB]$, obtemos $60 + a = b + f$ e, substituindo a por $b + 10$, vem $f = 70$. Opção correcta: C).

   (c) O número 10^{2011} escreve-se com o algarismo 1 seguido de 2011 zeros. Logo, o resultado da subtracção

$$\begin{array}{r} 1000\ldots00000 \\ -\qquad\quad 2011 \\ \hline 999\ldots97989 \end{array}$$

   é o número começado por 2007 noves e acabado em 7989. A soma dos seus algarismos é igual a $2009 \times 9 + 7 + 8 = 18081 + 15 = 18096$. Opção correcta: D).

   (d) Um número de dois algarismos, escrito sob a forma ab, é igual a $10a + b$, onde a é o algarismo (não nulo) das dezenas e b o algarismo das unidades. Os números que pretendemos satisfazem $a \times b + a + b = 10a + b$, ou seja, $a \times b = 9a$. Como $a \neq 0$, concluímos que b tem de ser 9. Assim, os números de dois algarismos que satisfazem a condição dada são os números que terminam em 9: $19, 29, \ldots, 99$. Portanto, há 9 números de dois algarismos nessas condições. Opção correcta: A).

2. **Resolução 1:** Seja M o ponto médio de $[CD]$. Então $\overline{AM}$ é a altura do triângulo $[ACD]$ relativamente ao lado $[DC]$, e é também a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente ao lado $[BC]$. Como os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$ têm a mesma área, conclui-se que $\overline{DC} = \overline{BC} = 1$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{AM}^2 + (\overline{MC} + \overline{CB})^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 + 2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2.$$

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2$, pelo que

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{MC} \cdot \overline{CB} + \overline{CB}^2} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Resolução 2: Como B, C e D estão na mesma recta, os triângulos $[ACD]$ e $[ABC]$ têm a mesma altura relativamente ao lado contido na recta BD. Como também têm a mesma área, conclui-se que $\overline{DC} = \overline{BC} = 1$. Logo $[ABC]$ é isósceles, tendo-se $\overline{BC} = \overline{AC}$ e $B\hat{A}C = A\hat{B}C$. Como $A\hat{C}B = D\hat{C}B - A\hat{C}D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, conclui-se que $B\hat{A}C = 30^\circ$. Portanto $B\hat{A}D = 30^\circ + 60 = 90^\circ$. Logo $[AB]$ é um cateto do triângulo rectângulo $[BAD]$. Então, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se $\overline{AB} = \sqrt{3}$.

3. Seja $abcdefghi$ um número com 9 dígitos. Para que a sequência dos primeiros 4 dígitos se repita na sequência dos 5 dígitos finais, então ou "$abcd$" $=$ "$efgh$" ou "$abcd$" $=$ "$fghi$". Como há 10 algarismos possíveis para cada dígito, o número de possibilidades para a sequência inicial é $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$. Suponhamos que "$abcd$" $=$ "$efgh$". Então, como há também 10 possibilidades para o valor de i, há $10^4 \times 10 = 10^5$ números com 9 dígitos tais que "$abcd$" $=$ "$efgh$". Da mesma forma, há 10^5 números com 9 dígitos em que "$abcd$" $=$ "$fghi$".

   Então para contarmos os números de 9 dígitos $abcdefghi$ em que "$abcd$" $=$ "$efgh$" ou "$abcd$" $=$ "$fghi$" devemos subtrair a $10^5 + 10^5$ o número de casos em que tanto "$abcd$" $=$ "$efgh$" como "$abcd''$ $=$ "$fghi''$. Mas "$abcd$" $=$ "$efgh$" como "$abcd$" $=$ "$fghi$" implica que $a = e = f$, $b = f = g$, $c = g = h$ e $d = h = i$, pelo que necessariamente todos os dígitos têm que ser iguais. Há, assim, 10 casos em que "$abcd$" $=$ "$efgh$" e "$abcd$" $=$ "$fghi$". Em conclusão, há $2 \times 10^5 - 10$ números de 9 dígitos em que a sequência dos primeiros 4 dígitos se repete na sequência dos 5 dígitos finais.