Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja n o número de conjuntos de 2 canetas comprados pela Patrícia. Se $n \geq 3$, a Patrícia pode substituir três conjuntos de duas canetas, que custam $3 \times 4 = 12€$, por dois conjuntos de três canetas, que custam $2 \times 5 = 10€$, gastando assim uma quantia menor. Portanto, basta analisar os casos em que $n = 0, 1, 2$.

   Se $n = 0$, a Patrícia tem que comprar 14 conjuntos de 3 canetas, gastando $14 \times 5 = 70€$.

   Se $n = 1$, a Patrícia tem que comprar 13 conjuntos de 3 canetas, gastando $13 \times 5 + 1 \times 4 = 69€$.

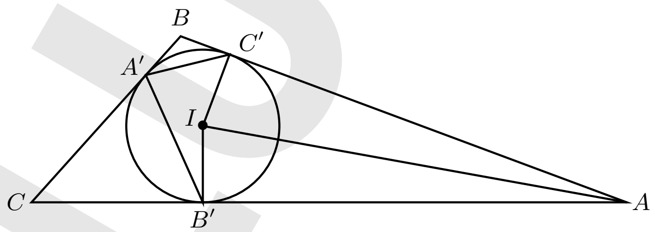
   Se $n = 2$, a Patrícia tem que comprar 12 conjuntos de 3 canetas, gastando $12 \times 5 + 2 \times 4 = 68€$.

   Portanto a quantia mínima que a Patrícia tem de gastar é 68 euros.

2. Como todos os mostradores indicam um número diferente de componentes com carga completa, então no máximo um destes mostradores está correcto. Do mesmo modo, no máximo um dos mostradores que indicam as componentes com carga vazia está correcto. Portanto pelo menos 2008 componentes têm ambos os mostradores errados, ou seja, pelo menos 2008 componentes têm carga vazia.

   Assim, há exactamente uma componente C que indica o número correcto de componentes com carga vazia. A componente C ou tem carga completa ou tem meia carga. Como C indica o mesmo número de componentes com carga completa, esse número está errado pois apenas existem 2010 mostradores. Assim, C tem meia carga e não há nenhuma componente com carga completa. Logo todos os mostradores que indicam as componentes com carga completa estão errados, ou seja, não há mais nenhuma componente com meia carga. Portanto há uma componente com meia carga e 2009 componentes com carga vazia.

3. Seja I o centro da circunferência inscrita no triângulo. Uma vez que IA é a bissectriz de $\measuredangle BAC$, então os triângulos rectângulos $[AIC']$ e $[AIB']$ são congruentes, logo $B'\widehat{I}C' = 2A\widehat{I}C'$. Usando a relação entre as amplitudes de ângulos inscritos e ângulos ao centro e o facto de que triângulo $[AIC']$ é rectângulo em C', tem-se $B'\widehat{A'}C' = \frac{1}{2}B'\widehat{I}C' = A\widehat{I}C' = 180 - A\widehat{C'}I - I\widehat{A}C' = 180 - 90 - 10 = 80°$.



4. Pretende-se saber qual o menor inteiro positivo n tal que o número $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots99}_{n\ 9's}$ tem exactamente 9999 algarismos 1. Note-se que

$$S_n = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots + (10^n - 1) = \underbrace{11\cdots1}_{n\ 1's}0 - n$$

   tem $n+1$ algarismos. Então, para que S_n tenha 9999 algarismos 1, tem-se necessariamente $n \geq 9998$. Ora,

   - $S_{9998} = \underbrace{11\cdots1}_{9998\ 1's}10 - 9998 = \underbrace{11\cdots11}_{9994\ 1's}01112$ tem exactamente 9997 algarismos 1;
   - $S_{9999} = \underbrace{11\cdots1}_{9999\ 1's}10 - 9999 = \underbrace{11\cdots11}_{9995\ 1's}01111$ tem exactamente 9999 algarismos 1.

   Portanto, para que a soma resultante da adição $9+99+999+9999+\cdots$ tenha exactamente 9999 algarismos 1, são necessárias 9999 parcelas.