Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIV OPM - 2ª Eliminatória - 18.01.2006 - Categoria B - 10º/12º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam x o número de quilómetros do trilho e y o número de quilómetros de subidas do percurso de ida. Assim, o percurso de ida tem $x-y$ quilómetros de descidas.

   No percurso de ida, a Sílvia e o Manuel subiram y km a 3 km/h, pelo que demoraram $\frac{y}{3}$ horas a subir o trilho. Da mesma forma, conclui-se que, no percurso de ida, a Sílvia e o Manuel desceram o trilho durante $\frac{x-y}{4}$ horas. Assim $\frac{y}{3}+\frac{x-y}{4}=3+\frac{2}{3}$, ou seja,

   $$\frac{y}{12}+\frac{x}{4}=\frac{11}{3}. \qquad (1)$$

   Analogamente se conclui que, no regresso, a Sílvia e o Manuel subiram durante $\frac{x-y}{3}$ horas e desceram durante $\frac{y}{4}$ horas. Assim, $\frac{x-y}{3}+\frac{y}{4}=3+\frac{1}{3}$, ou seja,

   $$-\frac{y}{12}+\frac{x}{3}=\frac{10}{3}. \qquad (2)$$

   Somando as equações (1) e (2) obtém-se $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=\frac{21}{3}$, ou seja, $x=12$ km.

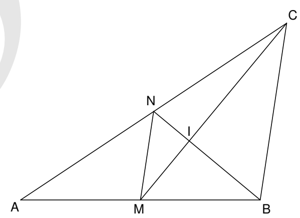
   Portanto, o trilho tem 12 km de comprimento.

2. Designe-se por S_n a soma de todos os números da circunferência no fim do passo n e determine-se a relação entre S_n e S_{n+1}. Cada número colocado na circunferência no passo $n+1$ obtém-se somando dois números da circunferência no passo n. Cada número da circunferência no passo n é parcela dos dois números que vão aparecer no meio dos arcos dos quais é extremidade. Logo, a soma dos números que são colocados no passo $n+1$ é o dobro de S_n, pelo que $S_{n+1}=S_n+2S_n=3S_n$.

   Assim $S_1=2$, $S_2=2\times 3$, $S_3=2\times 3^2, \ldots, S_{2006}=2\times 3^{2005}$.

   Portanto, a soma de todos os números escritos pelo Francisco ao fim de 2006 passos é 2×3^{2005}.

3. Sejam M e N os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[AC]$, respectivamente, e I o ponto de intersecção das medianas $[MC]$ e $[NB]$.



Os triângulos $[ABC]$ e $[AMN]$ são semelhantes porque têm um ângulo geometricamente igual e verificam $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = 2$. Assim, $[MN]$ e $[BC]$ são paralelos e $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = 2$, pelo que os triângulos $[MIN]$ e $[CIB]$ são semelhantes e

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IM}} = 2.$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos rectângulos $[BIM]$ e $[CNI]$, obtém-se

$$\overline{IM}^2 + 4\,\overline{IN}^2 = \overline{IM}^2 + \overline{IB}^2 = \overline{BM}^2 = 3^2 = 9$$

e

$$4\,\overline{IM}^2 + \overline{IN}^2 = \overline{IC}^2 + \overline{IN}^2 = \overline{CN}^2 = 4^2 = 16.$$

Deste modo, $5\,\overline{IM}^2 + 5\,\overline{IN}^2 = 9 + 16 = 25$, logo $\overline{NM} = \sqrt{\overline{IN}^2 + \overline{IM}^2} = \sqrt{5}$.

Portanto, $\overline{BC} = 2\,\overline{NM} = 2\sqrt{5}$.

4. O conjunto $\{1, 2, 4\}$ é triprimo porque $1 + 2 + 4 = 7$ é um número primo.

   Seja S um conjunto triprimo com 4 elementos. Então S não pode ter três elementos pares pois a sua soma seria um número par. Logo S tem pelo menos dois elementos ímpares. Se S tivesse algum elemento par, a soma dele com os dois elementos ímpares seria par. Conclui-se assim que todos os elementos de S são ímpares.

   Considerem-se agora os restos da divisão dos elementos de S por 3. Se houvesse três elementos de S com o mesmo resto, a sua soma seria múltipla de 3. Se S contivesse um elemento de resto 0, um elemento de resto 1 e um elemento de resto 2, a sua soma seria novamente um múltiplo de 3. Logo S contém dois elementos com um resto e dois elementos com outro resto.

   Procure-se um conjunto triprimo com quatro elementos ímpares cujos restos da divisão por 3 sejam 0 e 1. Os primeiros números ímpares que têm resto 0 quando divididos por 3 são 3 e 9 e os primeiros números ímpares que têm resto 1 quando divididos por 3 são 1 e 7. Verifica-se facilmente que $\{1, 3, 7, 9\}$ é de facto um conjunto triprimo.

   Suponha-se agora que existe um conjunto triprimo S com pelo menos 5 elementos. O raciocínio anterior mostra que S só pode ter dois elementos com o mesmo resto da divisão por 3, portanto terá pelo menos um elemento para cada resto 0, 1 ou 2. A soma destes elementos é múltipla de 3.

   Portanto o número máximo de elementos de um conjunto triprimo é 4.