# Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIV OPM - 2ª Eliminatória - 18.01.2006 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

*Sugestões para a resolução dos problemas*

1. Se o jogador escolhido pelo Tiago calça sapatos com $25$ cm de comprimento, então cada um dos jogadores consegue colocar $12$ pés sem pisar o adversário, porque $714 = 12 \times (33 + 25) + 18$. Deste modo, o jogador que comece o jogo pisa o adversário no último passo e ganha o jogo.

   De modo análogo, se o jogador escolhido pelo Tiago calça sapatos com $30$ cm de comprimento, então cada um dos jogadores consegue colocar $11$ pés sem pisar o adversário, porque $714 = 11 \times (33 + 30) + 21$. Novamente, o jogador que comece o jogo pisa o adversário no último passo e ganha o jogo.

   Finalmente, analise-se o caso em que o jogador escolhido pelo Tiago calça sapatos com $35$ cm de comprimento. Observe-se que $714 = 10 \times (33 + 35) + 34$. No caso da equipa do Diogo jogar primeiro, o seu jogador avança $11$ pés alternando com $11$ pés do adversário. O jogador da equipa do Tiago pisa o primeiro jogador quando joga pela $11^{\underline{a}}$ vez . No caso de jogar primeiro a equipa do Tiago, o seu jogador avança $11$ pés alternando com $10$ pés do adversário e ganha o jogo, pisando o segundo jogador no último passo. Assim, independentemente de quem comece a jogar, o jogador da equipa do Tiago ganha o jogo.

   Portanto, o Tiago deve escolher o rapaz que calça sapatos com $35$ cm de comprimento.

2. **Solução 1:** Os triângulos $[ABC]$ e $[EBD]$ são semelhantes, logo $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$. Como $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{DA}} = \dfrac{5}{3}$ e $\overline{AC} = 6$, tem-se $\overline{BC} = 10$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABC]$ conclui-se que $\overline{AB} = 8$.

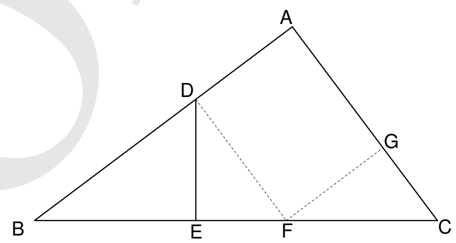
   Portanto, a área do triângulo $[ABC]$ é $24$ cm$^2$.

   **Solução 2:** Considerem-se os pontos $F$ e $G$ de $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente, de modo que $[ADFG]$ seja um rectângulo. Uma vez que $\overline{DE} = \overline{DA} = \overline{FG}$, os triângulos semelhantes $[GFC]$ e $[EDF]$ são congruentes.

   Por outro lado, da semelhança dos triângulos $[GFC]$ e $[ABC]$ tem-se que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{GC}} = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{FG}}$ e, como $\overline{BA} = \dfrac{8}{3}\,\overline{DA} = \dfrac{8}{3}\,\overline{FG}$, obtém-se $\overline{GC} = \dfrac{9}{4}$ e $\overline{FC} = \overline{DF} = \overline{AG} = \overline{AC} - \overline{GC} = \dfrac{15}{4}$.

   Por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[GFC]$ conclui-se que $\overline{DA} = \overline{FG} = 3$ e $\overline{AB} = 8$.

   Portanto, a área do triângulo $[ABC]$ é $24$ cm$^2$.




SOLUÇÕES

3. As somas dos algarismos dos números entre $100$ e $999$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 3 \times 9 = 27\}$. O único número com soma igual a $1$ é $100$. Há três números com soma igual a $2$, nomeadamente $101$, $110$ e $200$. Para as somas entre $3$ e $26$ há, pelo menos, três possibilidades e $999$ é o único número em que a soma dos algarismos é $27$.

   **Solução 1:** O João pode comprar $27$ rifas com $27$ somas diferentes. Em seguida, na pior das hipóteses, pode comprar $25$ rifas com somas diferentes e ficar assim com $25$ somas diferentes que se repetem em duas rifas. Logo, ao comprar $27 + 25 + 1 = 53$ rifas o João tem a certeza que tem rifas com três números em que a soma dos algarismos é a mesma.

   **Solução 2:** O João pode comprar, sem ganhar o super-prémio, as rifas com somas iguais a $1$ e a $27$ e duas rifas de cada soma entre $2$ e $26$. Assim, na pior das hipóteses, pode comprar $2 + 2 \times 25 = 52$ rifas e não ganhar o super-prémio. Logo, ao comprar $52 + 1 = 53$ rifas o João tem a certeza que tem rifas com três números em que a soma dos algarismos é a mesma.

4. Designe-se por $S_n$ a soma de todos os números da circunferência no fim do passo $n$ e determine-se a relação entre $S_n$ e $S_{n+1}$. Cada número colocado na circunferência no passo $n+1$ obtém-se somando dois números da circunferência no passo $n$. Cada número da circunferência no passo $n$ é parcela dos dois números que vão aparecer no meio dos arcos dos quais é extremidade. Logo, a soma dos números que são colocados no passo $n+1$ é o dobro de $S_n$, pelo que $S_{n+1} = S_n + 2S_n = 3S_n$.

   Assim, $S_1 = 2$, $S_2 = 2 \times 3$, $S_3 = 2 \times 3^2, \ldots, S_{15} = 2 \times 3^{14} = 9565938$.

   Portanto, a soma de todos os números escritos pelo Francisco ao fim de $15$ passos é $9565938$.

SOLUÇÕES