

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXIII OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2005 - Categoria B - 10º/12º

<http://www.spm.pt/~opm>

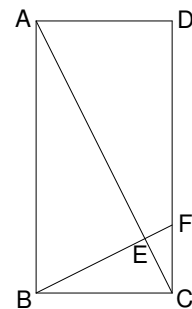
Duração: 2 horas

Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Dado um número natural, N , multiplica todos os seus algarismos. Repete o processo com o número obtido até teres um número com um só algarismo. A este algarismo chama-se fóssil de N . Por exemplo, o fóssil de 327 é 8. Encontra o maior número natural com os algarismos todos diferentes cujo fóssil é ímpar.

2. Na figura, $[BF]$ é perpendicular à diagonal $[AC]$ do rectângulo $[ABCD]$, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$. Qual é a razão entre as áreas dos polígonos $[AEFD]$ e $[ABCFE]$, em função de a e b ?



3. O agente secreto Jaime Bom tem de visitar 10 cidades que codificou com as letras $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J . Para cumprir a sua missão, tem de visitar A antes de E e E antes de I e, além disso, deve também visitar B antes de C . Quantos são os trajectos possíveis sabendo que cada cidade deve ser visitada exactamente uma vez?

4. Qual é o algarismo das unidades de

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots + 2003^{2003} + 2004^{2004} + 2005^{2005} ?$$