Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXIII OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2004 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. **Solução 1:** Seja x o número de tazos que o João tinha inicialmente. Ao trocar três quintos dos tazos que possuía por apenas um, o João ficou com $\frac{2}{5}x + 1$ tazos. Finalmente, o João ofereceu três quintos dos tazos que lhe restaram ao Miguel, ficando com $\frac{2}{5}(\frac{2}{5}x + 1)$ tazos. Como se sabe, no fim, o João ficou com 30 tazos, logo $\frac{2}{5}(\frac{2}{5}x + 1) = 30$, pelo que $x = 185$.

   Assim, inicialmente, o João tinha 185 tazos.

   Solução 2: Depois de oferecer três quintos dos seus tazos ao Miguel, o João ficou com 30 tazos, ou seja, dois quintos dos tazos que tinha. Desta forma, antes tinha $\frac{30}{2} \times 5 = 75$ tazos. Um destes 75 tazos foi trocado por três quintos dos tazos que o João tinha inicialmente, pelo que 74 tazos são dois quintos dos tazos que o João tinha no início. Assim, o João tinha $\frac{74}{2} \times 5 = 185$ tazos.

2. A soma de dois números naturais distintos entre 1 e 16 é um número entre 3 e 31. Os quadrados perfeitos entre 3 e 31 são os números $4, 9, 16$ e 25 e podem ser decompostos na soma de dois números naturais distintos entre 1 e 16 como se indica no quadro seguinte.

$1+$	$2+$	$3+$	$4+$	$5+$	$6+$	$7+$	$8+$	$9+$	$10+$	$11+$	$12+$	$13+$	$14+$	$15+$	$16+$	
3	$-$	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$=4$
8	7	6	5	4	3	2	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$=9$
15	14	13	12	11	10	9	$-$	7	6	5	4	3	2	1	$-$	$=16$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	16	15	14	13	12	11	10	9	$=25$

   Observe-se que cada um dos números 8 e 16 só pode ter um vizinho, 1 e 9, respectivamente. Logo os números 8 e 16 têm de ficar nos extremos da tabela.

8	1													9	16

   Cada um dos números 1 e 3 tem três hipóteses para os seus vizinhos. Cada um dos restantes tem apenas duas hipóteses, ou seja, os seus vizinhos estão à partida determinados.

8	1				3	13	12	4	5	11	14	2	7	9	16

   Para a escolha dos vizinhos dos números 1 e 3 restam os números $6, 10$ e 15. Junto do número 3 só pode ficar 6 e de $1, 15$. O número 10 fica no espaço que resta.

8	1	15	10	6	3	13	12	4	5	11	14	2	7	9	16

   A tabela assim obtida satisfaz as condições exigidas.

3. Como o triângulo é equilátero, pelo teorema de Pitágoras, a sua altura é

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Assim, a área do triângulo é

$$\frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Uma vez que a amplitude de cada um dos ângulos internos de um triângulo equilátero é 60^o, ou seja, um sexto de 360^o, a área da parte do círculo que está escondida é um sexto da sua área total. O raio r do círculo verifica a equação

$$\frac{\pi r^2}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Portanto, o raio da lua pintada pela Paula Pinto é $r = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$ dm $\approx 12,86$ cm.

4. Para construir uma torre de 100 andares é necessário colocar no primeiro andar 2×100 cartas, seguidas de 99 cartas na horizontal, no segundo andar 2×99 cartas, seguidas de 98 cartas na horizontal, e assim sucessivamente, terminando com apenas 2 cartas no 100° andar. Logo, o número de cartas necessárias é

$$(2 \times 100 + 99) + (2 \times 99 + 98) + \ldots + (2 \times 2 + 1) + 2 \times 1$$

$$= 2 \times (100 + 99 + \ldots + 2 + 1) + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1.$$

A soma $100 + 99 + \ldots + 2 + 1$ tem 100 parcelas. Associando a primeira parcela com a última, a segunda com a penúltima, a terceira com a antepenúltima, e assim sucessivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 &= (100 + 1) + (99 + 2) + \cdots + (52 + 49) + (51 + 50) \\ &= 50 \times 101 = 5050. \end{aligned}$$

Logo, $99 + 98 + \ldots + 2 + 1 = 5050 - 100 = 4950.$

Portanto, são necessárias $2 \times 5050 + 4950 = 15050$ cartas para construir uma torre com 100 andares.