Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXI OPM - Final - 1º dia - 11.04.2003 - Categoria A

Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução de problemas

1. (a) Dado que as idades dos elementos da equipa são números inteiros, a sua soma também é um número inteiro. Assim, o número mínimo de elementos da equipa é o menor inteiro cujo produto por $14,625$ é também um inteiro, ou seja, 8.

   Opção correcta: D)

   (b) O número de perguntas que estão nas condições do enunciado, x, verifica a igualdade $\frac{80}{100} \times 450 + x = \frac{90}{100}(450 + x)$, ou seja, $x = 450$. Assim, a percentagem aumenta para 90% ao fim de mais 450 perguntas.

   Opção correcta: E)

   (c) Os múltiplos de 2 entre 1 e 2003 são da forma $2k$, com k um número inteiro entre 1 e 1001, logo são 1001. Os múltiplos de 3 entre 1 e 2003 são da forma $3k$, com k um número inteiro entre 1 e 667, logo são 667. Os múltiplos comuns de 2 e 3 entre 1 e 2003 são da forma $6k$, com k um número inteiro entre 1 e 333, logo são 333. Consequentemente, existem $1001 + 667 - 333 = 1335$ múltiplos de 2 ou de 3 entre 1 e 2003.

   Opção correcta: D)

   (d) **Solução 1**: Seja O um ponto no interior da estrela. Considerem-se os 7 triângulos $[OAC]$, $[OCE]$, $[OEG]$, $[OGB]$, $[OBD]$, $[ODF]$ e $[OFA]$. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, tem-se

$$2 \times 360 + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 7 \times 180,$$

   logo, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 540^o$.

   Solução 2: Considerem-se os pontos H, I, J, L, M, N, P e O indicados na figura e os 7 triângulos $[OHI]$, $[OIJ]$, $[OJL]$, $[OLM]$, $[OMN]$, $[ONP]$ e $[OPH]$. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, conclui-se que

$$360 + P\hat{H}I + H\hat{I}J + I\hat{J}L + J\hat{L}M + L\hat{M}N + M\hat{N}P + N\hat{P}H = 7 \times 180,$$

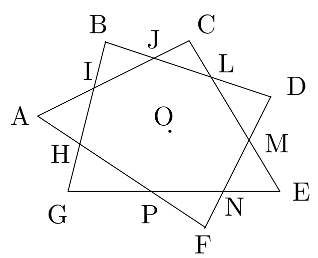
   ou seja,

$$P\hat{H}I + H\hat{I}J + I\hat{J}L + J\hat{L}M + L\hat{M}N + M\hat{N}P + N\hat{P}H = 5 \times 180.$$

   Analogamente,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G}$$
$$+7 \times 360 - 2 \times (P\hat{H}I + H\hat{I}J + I\hat{J}L + J\hat{L}M$$
$$+L\hat{M}N + M\hat{N}P + N\hat{P}H) = 7 \times 180,$$

   logo, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 540^o$.



   Opção correcta: E)

2. Observe-se que $\triangle = 1$. Na verdade, se fosse $\triangle > 1$, ter-se-ia $\triangle 0 \nabla - \nabla\triangle > 100$ e, em 18 minutos, ter-se-ia percorrido uma distância superior a 100 metros. Mas, para percorrer à mesma velocidade a distância de $\nabla\triangle - \triangle\nabla$ metros, inferior a 100 metros, foram necessários 42 minutos, o que é absurdo.

   Numa hora foram percorridos exactamente $10\nabla - 1\nabla = 90$ metros, logo, em 42 minutos, percorreram-se $\frac{42}{60} \times 90 = 63$ metros. Assim, $\nabla 1 - 1\nabla = (10\nabla + 1) - (10 + \nabla) = 9(\nabla - 1) = 63$ e tem-se $\nabla = 8$.

   Finalmente, conclui-se que, para percorrer $\triangle\nabla = 18$ metros, foram necessários $\frac{18}{90} \times 60 = 12$ minutos. Consequentemente, o passeio começou às 13 horas e 48 minutos.

3. A camada de espuma deve, no mínimo, ser constituída por 6 paralelepípedos de dimensões $0,5 \times 1 \times 1$, contíguos a cada uma das 6 faces do cubo, 12 quartos de cilindro com 1 de altura e $0,5$ de raio de base, alinhados com cada uma das 12 arestas do cubo e 8 oitavos de esfera de raio $0,5$ centrados em cada um dos oito vértices do cubo. Assim, o volume mínimo de espuma é

$$6 \times 0,5 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times \pi \times (0,5)^2 + \frac{4}{3} \times \pi \times (0,5)^3 = 3 + \frac{11}{12}\pi \, \mathrm{km}^3.$$