OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/~opm

XX OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
1ª Eliminatória

14/11/2001

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos. Não é permitido o uso de calculadoras.

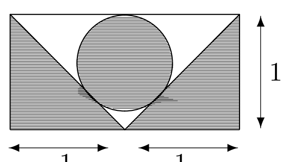
Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

1. Um tabuleiro quadrado com 99 quadrículas de lado foi decorado com os símbolos $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\heartsuit$ e $\spadesuit$ da forma indicada na figura. Qual foi o símbolo mais utilizado? Solução

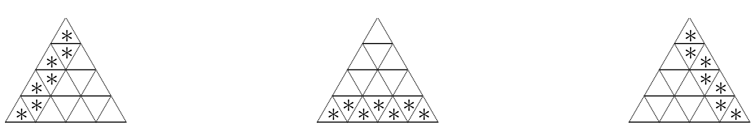
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\cdots$	
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$		$\cdots$	
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$			$\cdots$	
$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$				$\cdots$	
$\diamondsuit$	$\clubsuit$					$\cdots$	
$\clubsuit$						$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
						$\cdots$	

2. Um rectângulo foi dividido como se indica na figura. Sabendo que a circunferência é tangente aos três lados, quanto mede a área da região sombreada? Solução



3. O Luís e a Ana estão a remodelar o quintal da sua casa e decidiram pavimentar um caminho de 1 metro de largura por 10 metros de comprimento. Esqueceram-se de combinar quem faria as compras e ambos compraram material: o Luís comprou 10 pedras quadradas de 1 metro de lado e a Ana comprou 5 pedras rectangulares de 1 metro por 2 metros. Sabendo que eles consideram a possibilidade de usar todas as pedras quadradas, todas as rectangulares ou misturar quadradas e rectangulares, quantas configurações diferentes há para o pavimento? Solução

4. Um triângulo é dividido em dezasseis triângulos iguais. Será possível atribuir um número inteiro entre 1 e 16 (sem repetição) a cada um desses triângulos, de modo que o produto dos números de cada uma das três filas laterais, indicadas na figura com *, seja o mesmo?



Solução

XX OPM - Categoria B (10º, 11º, 12º anos)
1ª Eliminatória

14/11/2001

SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

---

1. Como $99 = 24 \times 4 + 3$, ao retirarmos as 3 últimas linhas do tabuleiro, cada coluna fica exactamente com 24 conjuntos $\{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Logo, nesta parte do tabuleiro (formada pelas primeiras 96 linhas) os símbolos $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\heartsuit$ e $\spadesuit$ estão em igual número.

   A primeira coluna do tabuleiro é constituída por 24 sequências iguais ($\diamondsuit$,$\clubsuit$,$\heartsuit$,$\spadesuit$) e uma sequência ($\diamondsuit$,$\clubsuit$,$\heartsuit$), por isso as 3 últimas linhas do tabuleiro têm os símbolos dispostos da forma seguinte:

$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\cdots$	
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\cdots$	
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$	$\cdots$	

   Por um raciocínio análogo ao utilizado para as primeiras 96 linhas, concluímos que, se retirarmos as 3 últimas colunas às linhas indicadas na figura anterior, os símbolos $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\heartsuit$ e $\spadesuit$ ficam em igual número.

   Por fim, analisemos o quadrado formado pelas 3 últimas colunas das 3 últimas linhas. Como a primeira das 3 últimas linhas também termina com a sequência ($\diamondsuit$,$\clubsuit$,$\heartsuit$) (exactamente como acontece com a primeira coluna do tabuleiro), o quadrado tem os símbolos dispostos da forma seguinte:

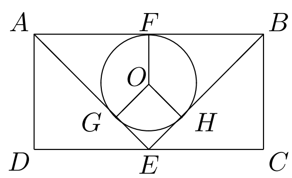
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamondsuit$

   Neste quadrado o símbolo $\heartsuit$ aparece mais uma vez do que qualquer um dos outros. Concluímos então que o símbolo $\heartsuit$ é o mais utilizado.

Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

2. A soma das áreas dos triângulos $[AED]$ e $[BCE]$ é $\frac{\overline{DE}\cdot\overline{AD}}{2}+\frac{\overline{EC}\cdot\overline{BC}}{2}=1$. Resta determinar a área do círculo. Sejam O o centro e r o raio do círculo. Note-se que, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{BE}=\sqrt{2}$. Além disso, o quadrilátero $[OHEG]$ é um quadrado de lado r, pois os dois triângulos sombreados são isósceles rectângulos e por isso $A\widehat{E}B=90^o$.



Solução 1: Por outro lado, $O\widehat{F}B=O\widehat{H}B=90^0$ e $\overline{OF}=\overline{OH}=r$ logo $\overline{HB}=\overline{FB}=1$ e assim $1=\overline{HB}=\overline{EB}-\overline{EH}=\sqrt{2}-r$, pelo que $r=\sqrt{2}-1$ e a área do círculo é $\pi r^2=\pi(3-2\sqrt{2})$.

Solução 2: Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[OHE]$, vem $\overline{OE}^2=\overline{EH}^2+\overline{HO}^2$. Como $\overline{OE}=1-r$ e $\overline{EH}=\overline{HO}=r$, então $r^2+2r-1=0$, pelo que $r=\sqrt{2}-1$ e a área do círculo é $\pi r^2=\pi(3-2\sqrt{2})$.

Solução 3: Por outro lado, os triângulos $[OHE]$ e $[BCE]$ são isósceles rectângulos, logo $\frac{\overline{EH}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{EO}}{\overline{EB}}$ e assim $\sqrt{2}r=1-r$, pelo que $r=\sqrt{2}-1$ e a área do círculo é $\pi r^2=\pi(3-2\sqrt{2})$.

Portanto, a área da região sombreada é $\pi(3-2\sqrt{2})+1$.

Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

3. **Solução 1:** Seja p o número de pedras rectangulares utilizadas. Vamos considerar as 6 possibilidades:

   - $p = 0$
     Existe uma única configuração (a que se obtém usando todas as pedras quadradas).
   - $p = 1$
     Existem 9 posições possíveis para a pedra rectangular, logo existem 9 configurações possíveis.
   - $p = 2$
     Se a primeira pedra a ser colocada for rectangular sobram 1×8 metros (isto é, 1 metro por 8 metros) para a colocação da segunda pedra rectangular, logo existem 7 posições possíveis para a sua colocação; se primeiro for colocada uma pedra quadrada seguida de uma rectangular, existem 6 posições possíveis para a colocação da segunda pedra rectangular, e assim sucessivamente. Ao todo existem $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ configurações possíveis.
   - $p = 3$
     Fazendo variar a posição da primeira pedra rectangular a ser colocada vamos ter as seguintes possibilidades:
     - colocar 2 pedras rectangulares nos 1×8 metros que sobram: 5+4+3+2+1 configurações;
     - colocar 2 pedras rectangulares nos 1×7 metros que sobram: 4+3+2+1 configurações;
     - colocar 2 pedras rectangulares nos 1×6 metros que sobram: 3+2+1 configurações;
     - colocar 2 pedras rectangulares nos 1×5 metros que sobram: 2+1 configurações;
     - colocar 2 pedras rectangulares nos 1×4 metros que sobram: 1 configuração.
     Ao todo existem 35 configurações possíveis.
   - $p = 4$
     Fazendo variar a posição da primeira pedra rectangular a ser colocada e por um raciocínio análogo ao anterior, temos o seguinte:
     - colocar 3 pedras rectangulares nos 1×8 metros que sobram: 10 configurações diferentes;
     - colocar 3 pedras rectangulares nos 1×7 metros que sobram: 4 configurações diferentes;
     - colocar 3 pedras rectangulares nos 1×6 metros que sobram: 1 configuração.
     Ao todo existem 15 configurações diferentes.
   - $p = 5$
     Existe uma única configuração.

   Portanto existem 89 formas diferentes de fazer o pavimento.

(Continua)

SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

Solução 2: Seja $f(n)$ o número de configurações possíveis para um caminho de dimensões 1 metro por n metros, pavimentado com as pedras compradas. Como a única possibilidade de pavimentar um caminho de 1 por 1 metro é usar 1 pedra quadrada então $f(1) = 1$. Para um caminho 1 por 2 há 2 possibilidades: 1 pedra rectangular ou 2 quadradas, logo $f(2) = 2$. Para $n \geq 3$, a primeira pedra a ser posta pode ser quadrada ou rectangular. O número de configurações possíveis para o primeiro caso é $f(n-1)$ e para o segundo é $f(n-2)$. Portanto $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Assim temos que $f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 8, \dots, f(10) = 89$.

Enunciado da Prova

XX OPM - Categoria B ($10^{\underline{o}}$, $11^{\underline{o}}$, $12^{\underline{o}}$ **anos**)
$1^{\underline{a}}$ **Eliminatória**

14/11/2001

SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

---

4. Em primeiro lugar, observe-se que os números 11 e 13 são primos e nenhum dos dois é factor de qualquer outro número inteiro entre 1 e 16. Uma vez que há apenas um triângulo (o do meio) que não pertence a nenhuma das filas assinaladas, um desses dois números primos tem que aparecer num dos triângulos marcados com *. No entanto, esse número não poderá pertencer a mais de duas filas simultaneamente (ou seja, é apenas factor de um ou dois dos produtos em questão). Portanto, os três produtos não possuem a mesma factorização em primos e por isso não podem ser iguais.

Enunciado da Prova