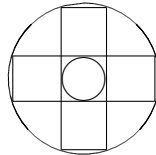


Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.

*Duração: 2 horas*

*Cada questão vale 10 pontos.*

- Um relógio de ponteiros atrasa-se 30 segundos em cada hora. Sabendo que às 12 horas de hoje indica a hora exacta, em que dia voltará a estar certo? Solução
- O Astérix e o seu companheiro Obélix estão a explorar um país muito pequeno no qual apenas existe uma estrada (em linha recta) que liga as três cidades que pretendem visitar: Amix, Berlix e Celtix. Ao chegarem à cidade de Amix avistam dois sinais com as seguintes indicações: “Berlix 5 km” e “Celtix 7 km”. Caminham mais alguns quilómetros e chegam à cidade de Berlix, onde, com grande espanto, o Obélix encontra dois sinais com as indicações: “Amix 4 km” e “Celtix 6 km”. Ao comentar com o Astérix o sucedido, este responde-lhe: “Não te preocupes! Sabe-se que numa das cidades todos os sinais têm indicações erradas, noutra todas as indicações são correctas e na outra uma indicação é correcta e a outra errada.” Por fim, ao chegarem à cidade de Celtix avistam mais dois sinais: “Amix 7 km” e “Berlix 3 km”. Quais são as verdadeiras distâncias entre as três cidades? Solução
- O Alfredo encaixou 4 dados e 1 berlinde no fundo dum copo, com a seguinte disposição:

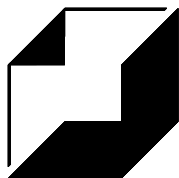


Mas agora, para recuperar o seu berlinde preferido o Alfredo tem de partir o copo e para que a sua mãe não descubra decide comprar outro copo igual. Sabendo que o raio do berlinde mede 1 cm, quanto mede o diâmetro da base do copo que o Alfredo tem que comprar? Solução

- Um tabuleiro quadrado com 99 quadrículas de lado foi decorado com os símbolos  $\diamond$ ,  $\clubsuit$ ,  $\heartsuit$  e  $\spadesuit$  da forma indicada na figura. Qual foi o símbolo mais utilizado?

$\diamond$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$	...	
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$		...	
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$			...	
$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$				...	
$\diamond$	$\clubsuit$					...	
$\clubsuit$						...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
						...	

Solução

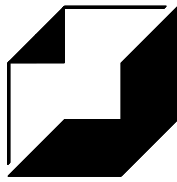


SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

---

1. Note-se em primeiro lugar que um relógio de ponteiros só volta a estar certo depois de se atrasar 12 horas, por isso basta determinar quanto tempo demora o relógio a atrasar-se 12 horas. Como o relógio se atrasa 30 segundos em cada hora, vai atrasar-se 12 minutos por dia, ou seja, vai demorar 5 dias a atrasar-se 1 hora, ou ainda, vai demorar 60 dias a atrasar-se 12 horas. Tendo em conta que o mês de Novembro tem 30 dias e o de Dezembro 31, conclui-se que o relógio voltará a estar certo no dia 13 de Janeiro de 2002 (às 12 horas).

[Enunciado da Prova](#)



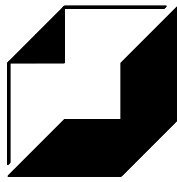
## SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

2. Suponha-se que a distância entre Amix e Celtix não é  $7\text{ km}$ . Então em cada uma destas cidades existiria pelo menos um sinal com indicação errada, logo seria Berlix a cidade contendo os dois sinais com indicações correctas. Mas nesse caso todos os sinais em Amix e Celtix teriam as indicações erradas, o que contraria o facto de apenas numa das três cidades ambos os sinais conterem indicações erradas. Logo, a distância entre Amix e Celtix é de  $7\text{ km}$ , e é em Berlix que ambas as indicações estão erradas.

Agora, se em Celtix o sinal com a indicação “Berlix  $3\text{ km}$ ” fosse correcto então a distância entre Amix e Berlix teria de ser  $4\text{ km}$  (pois já vimos que a distância entre Amix e Celtix é de  $7\text{ km}$ ), o que não pode suceder, pois nesse caso a indicação “Amix  $4\text{ km}$ ” em Berlix não estaria errada. Assim, terá de ser em Amix que se encontra o terceiro sinal com indicação correcta, nomeadamente “Berlix  $5\text{ km}$ ”.

Conclui-se que a distância entre Amix e Berlix é de  $5\text{ km}$  e que a distância entre Berlix e Celtix é de  $7 - 5 = 2\text{ km}$ .

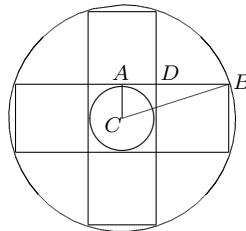
[Enunciado da Prova](#)



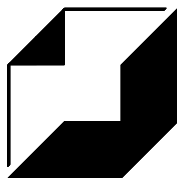
SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

---

3. Consideremos os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  como indicado na figura, onde  $C$  é o centro das circunferências e  $A$  o ponto de tangência da circunferência interior com um dos quadrados. O triângulo  $[CAB]$  é rectângulo em  $A$  e aplicando o teorema de Pitágoras vem  $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 1 + \overline{AB}^2$ . Como  $\overline{AD} = 1$  e  $\overline{DB} = 2$  então  $\overline{AB} = 3$  e  $\overline{CB} = \sqrt{10}$ . Portanto o Alfredo tem que comprar um copo cujo diâmetro da base seja  $2\sqrt{10}$  cm.



Enunciado da Prova



SUGESTÕES para a resolução dos problemas.

4. Como  $99 = 24 \times 4 + 3$ , ao retirarmos as 3 últimas linhas do tabuleiro, cada coluna fica exactamente com 24 conjuntos  $\{\diamond, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ . Logo, nesta parte do tabuleiro (formada pelas primeiras 96 linhas) os símbolos  $\diamond$ ,  $\clubsuit$ ,  $\heartsuit$  e  $\spadesuit$  estão em igual número.

A primeira coluna do tabuleiro é constituída por 24 sequências iguais  $(\diamond, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit)$  e uma sequência  $(\diamond, \clubsuit, \heartsuit)$ , por isso as 3 últimas linhas do tabuleiro têm os símbolos dispostos da forma seguinte:

$\diamond$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	...	
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	...	
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$	...	

Por um raciocínio análogo ao utilizado para as primeiras 96 linhas, concluímos que, se retirarmos as 3 últimas colunas às linhas indicadas na figura anterior, os símbolos  $\diamond$ ,  $\clubsuit$ ,  $\heartsuit$  e  $\spadesuit$  ficam em igual número.

Por fim, analisemos o quadrado formado pelas 3 últimas colunas das 3 últimas linhas. Como a primeira das 3 últimas linhas também termina com a sequência  $(\diamond, \clubsuit, \heartsuit)$  (exactamente como acontece com a primeira coluna do tabuleiro), o quadrado tem os símbolos dispostos da forma seguinte:

$\diamond$	$\clubsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\diamond$

Neste quadrado o símbolo  $\heartsuit$  aparece mais uma vez do que qualquer um dos outros. Concluímos então que o símbolo  $\heartsuit$  é o mais utilizado.

Enunciado da Prova